

KARA DELİKLERİN HİÇ SÜPERSAÇI YOKTUR

Rahmi Güven

Bogazici University Library



14

39001100374829

Doçentlik Tezi

Eylül, 1980

ÖZET

Süpergravite teorisince öngürülen, elektrik yüksüz kara delikler için saç yok teoremi kanıtlanmıştır. Süpergravite alan denklemleri Rarita-Schwinger alanına göre lineerleştirilmiş ve bu şekilde spin $3/2$ alanının, boşluk Einstein denklemlerini sağlayan bir fonda, tutarlı bir test alanı olarak yorumlanabildiği tartışılmıştır.

Newman-Penrose-Debever ve Geroch-Held-Penrose formalizmleri kullanılarak spin $3/2$ test alanının sağladığı denklemler kullanışlı yeni biçimlere sokulmuştur. Bu yeni biçimler aracılığıyla ayarla türetilmiş çözümler ayıklanmıştır. Sıfıra dönüştürülemeyen süperyüklerle yol açan bütün spin $3/2$ alanlarının, D tipi fon geometrilerinde, iki kompleks skalarla tamamen belirlendiği gösterilmiştir. Bu skalar alan değişkenlerinin sağladıkları kuplajsız, lineer kısmi diferansiyel denklemler bulunmuştur. Bu denklemler Kerr fonunda değişkenlere ayırma yöntemiyle incelenmiş ve bunların $s = \pm 3/2$ Teukolsky denklemleri olduğu kanıtlanmıştır. Rarita-Schwinger alanının kara delik te-dirgenmeleri programındaki doğal yeri böylece saptanmıştır. $s = \pm 3/2$ Teukolsky denklemlerinin olay ufkunda ve sonsuzda regüler, durağan çözümleri yoktur. Dolayısıyla, süpergravite alan denklemlerinin Kerr ailesine sürekli bir biçimde bağlanabilen, onları süperyükle genelle-yebilen, regüler, durağan, kesin çözümleri de bulunamayacaktır.

İÇİNDEKİLER

I. GİRİŞ	Sayfa
1. Kara Delikler ve Saç Yok Teoremleri	1
2. Kara Deliklerin Lineer Tedirgenmeleri	6
3. Süpersimetri ve Süpergravite	10
4. Amaç	12
II. RARİTA-SCHWINGER ALANININ TEDİRGEME YORUMU	
1. Süpergravite Alan Denklemleri	15
2. Tedirgeme Denklemleri ve Bunların Yeni Biçimleri	19
III. SAÇ YOK TEOREMİNİN KANITI	
1. Ayarla Türetilmiş Çözümlerin Ayıklanması	32
2. Kuplajsız Alan Değişkenleri	38
3. $s = \pm 3/2$ Teukolsky Denklemleri	42
IV. TARTIŞMA	46
EKLER	
Ek 1. Anlaşmalar	50
Ek 2. GHP Formalizmi	51
Ek 3. Temel Denklemlerin Tetrad Bileşenleri	53
KAYNAKLAR	54

I. GİRİŞ

1. Kara Delikler ve Saç Yok Teoremleri

Çok yoğun kütleli gök cisimlerinin ve bunların doğurduğu şiddetli gravitasyon alanlarının evrende bulunabileceğini işaret eden ilk çalışmalar oldukça eskidir. 1931'de Chandrasekhar⁽¹⁾ bevaz cüce kütleleri için güneş kütlesi civarında bir üst sınır bulmuş, bir yıl sonra da Landau⁽²⁾ bu buluşun basit bir açıklamasını vermişti. Kütleleri Chandrasekhar sınırını aşan yıldızların ne olacağı sorusu da böylece gündeme girmişti. Bu sorunun şaşırtıcı ilk yanıtını 1939'da Oppenheimer ve Snyder⁽³⁾ vermişti. Oppenheimer ve Snyder modelinde gravitasyonel çökme durdurulamıyor, yıldızın bütün kütlesi bir noktada toplanıyor ve uzay-zamanda bir singüler nokta ortaya çıkıyordu. Çökmüş yıldızın dışındaki geometri ise Schwarzschild çözümüyle⁽⁴⁾ açıklanıyor; Schwarzschild olay ufğunun ötesinde yıldızın gözden kaybolacağı anlaşılıyordu. Gravitasyonel çökmenin tümünden kaçınılmazlığı, uzay-zamanda singüleritelerin oluşması gibi olgular o yıllarda bir çok araştırmacıya çekici gelmemişti. Garipsenen bu sonuçlar eldeki modellerin özel varsayımlarına, simetrilerine bağlanmıştı. Örneğin Schwarzschild çözümü ancak tam küresel simetrik bir çökme olayı için geçerliydi; bu da doğa da gerçekleşmeyebilirdi. Bu çözümün gerçi ilginç başka bir özelliği de vardı; tekliği kanıtlanabiliyordu. Birkhoff⁽⁵⁾ daha 1923'de her küresel simetrik boşluk çözümünün statik olması gerektiğini ve Schwarzschild çözümüne dönüştürülebileceğini göstermişti. Yıldız kütlesi küresel simetrik dış geometriyi belirleyen tek parametre olarak ortaya çıkıyordu. Küresel simetriden sapma-

lar acaba nelere yolaçabilirdi? Bu önemli soru uzunca bir süre ele alınamadı. Gravitasyonel çökmeye duyulan ilgi, durkun bir dönemin ardından, 1950'lerin sonunda yeniden canlandı. 1957'de Regge ve Wheeler'in⁽⁶⁾ Schwarzschild ufkunun stabilitesini araştırmaları canlanan ilgiye ilk örnek olarak verilebilir. Diğer bir öncü çalışma da Lifshitz ve Khalatnikov⁽⁷⁾ tarafından 1963'de yapılmış, küresel simetrik durumda kaçınılmayan singülaritenin daha genel durumlarda ne olacağı araştırılmıştı. 1963 yılında büyük bir atılım da gerçekleştirildi; Kerr, boşluk Einstein denklemlerinin yeni bir sınıf kesin çözümünü elde etti⁽⁸⁾. Bunlar iki parametrelili, asimtotik düz ve durağan çözümlerdi. Üstelik bu çözümler Schwarzschild geometrisini açısal momentumun varolduğu durumlara genelliyordu. Böylece küresel simetrik olmayan çökmeler sonunda oluşabilecek geometrilere ilk örnek ele geçmişti.

1965'de çok değerli başka bir sonuç elde edildi; Penrose ilk singülarite teoremini kanıtladı⁽⁹⁾. Penrose'un bu makalesi gravitasyonel çökme konusundaki önemli yeni gelişmelerinde başlangıç noktası olarak alınabilir. Bu çalışmanın ardından Hawking ve Penrose'un kanıtladıkları bir dizi teoremlerle o güne değin yalnız özel modellerde karşılaşılan singülaritelerin Einstein kuramının genel bir öngörüsü olduğu anlaşıldı. Enerjinin artı işareti taşıması, nedenselliğinin korunması gibi bir takım varsayımlar altında singülaritelerinin oluşması kaçınılmazdı. Bu teoremler için geliştirilen zengin global teknikler gravitasyonel çökme sorununa da genel bir yaklaşım biçimi sağladı. Kısıtlanmış kapalı yüzey⁽¹⁰⁾ kavramı ortaya atıldı ve olay ufuklarının global tanımı yapıldı. Küresel simetriden sapmalar olsa bile tümünden çökmenin engelle-

nemiyeceği görüldü. Son evrim basamaklarında büyük yıldızların çevresinde kısıtlanmış kapalı yüzeylerin oluşması gerekiyordu. Bu da singülaritelere yolaçıyordu. Dolayısıyla, gravitasyonel çökme ancak iki şekilde son bulabilirdi. Karşılaşılabilecek birinci durumda, çökme sonucu doğrudan çıplak bir singülarite oluşuyordu. Singülaritenin bir olay ufkuyla örtülmediği bu durumda Cauchy ufuklarıyla⁽¹⁰⁾ karşılaşılmalıydı. Bu ise yıldızın uzağında geleceğin fiziksel yasalarla önceden kestirilmesine olanak vermezdi. Bu nedenle çıplak singülariteler fizikte önemli bir sorun yarattı ve "kozmetik sansür" hipoteziyle⁽¹¹⁾ dışarlanmaya çalışıldı. Kozmik sansür hipotezinin ispatı çözülmemiş temel bir problem olarak halen genel relativitenin gündemindedir. Karşılaşılabilecek diğer durumda ise bir olay ufku ortaya çıkıyor ve bu ufuk, içerisinde parçacıkların ve fotonların hap solunduğu, singülaritenin gözden saklandığı bir uzay-zaman bölgesini örtüyordu. Böyle bir çökme sonunda varlığı ancak gravitasyonel etkilerle saptanabilecek, pratikte görünmeyen, kara, gök cisimleri ortaya çıkmalıydı. Bu tür uzay-zaman bölgelerine 1968'de Wheeler tarafından "Kara delik" ismi verildi, Gravitasyonel çökmenin mümkün bir - ve geleceğin önceden kestirilebilmesi varsayımı altında tek - sonucunun kara delikler olduğu böylece kesinleşmişti. Bu yüzden kara deliklerin dış geometrilerini betimleyecek bütün çözümlerin araştırılması önem kazandı. Bu amaçla kara delik olay ufuklarının dinamik özellikleri irdelendi ve mümkün kara delik denge konumları incelendi.

Olay ufuklarının varlığı denge konumları problemini şöyle biçimlendirmiştir: Olay ufkundan içeriye giren madde ve enerji dışarıdan göz-

lenemeyecektir. Bu nedenle çökme süresince sonsuza gravitasyonel dalgalar ya da başka şekillerde ısınabilecek toplam enerjinin sınırlı bir büyüklükte olması gerekir. Eldeki bu enerjinin ısınması sonunda kara deliğin durağan bir denge konumuna erişmesi beklenir. Kerr ve Schwarzschild çözümleri bu tür denge konumlarına bilinen örneklerdir. Kerr çözümlerinin elektrik yüklü genellemeleri de 1965'de bulunmuş⁽¹²⁾, elektromanyetik alanın delik geometrisine nasıl bir damga vurabildiği anlaşılmıştır. Kerr-Newman çözümlerinde dış geometriyi belirleyen yalnızca üç parametre bulunmaktadır. Bunlar kara deliğin kütlesi, açısal momentumu ve elektrik yüküdür. Acaba bu üç parametre kara deliğin her durağan denge konumunu tamamen belirleyebilir mi? Durağan bir genel kara delik çözümünde yıldızın multipol yapısı serbestlik derecelerine bu denli basit bir biçimde mi yansımalıdır? Öte yandan, çöken bir yıldızda elektromanyetik alanın yanısıra diğer madde alanlarının da bulunması düşünülebilir. Çökme sonunda bu alanlar da dış geometride bazı izler bırakacaklar mıdır? Başka bir deyişle, Kerr-Newman ailesinden daha genel ya da bu aileden tümünden bağımsız durağan denge konumları var mıdır?

Geriye döndüğümüzde bu ilginç soruların iki düzeyde ele alındığını görürüz. Wheeler tarafından "kara deliklerin hiç saçı yoktur" şeklinde özetlenen sonuçlar birinci aşama olarak nitelenebilir. Bu aşamada, yıldızların denge konumuna geçiş için harcadıkları zamanın astronomi ölçeklerine göre küçük olduğu anlaşılmış ve "saç yok teoremleri" diye adlandırılan teoremler kanıtlanmıştır. Saç yok teoremleriyle Kerr-Newman çözümlerine sürekli bir biçimde bağlanılabilen, yeni parametreleriyle

bu çözümleri genelleyen çözümlerin bulunmadığı saptanmıştır.⁽¹³⁾

Bu teoremler Kerr ailesinden bağımsız başka çözümlerin varlığını dışlamamaktadır. İkinci düzeydeki program ise bunun sağlanması yani Kerr-Newman ailesinin tekliğinin kanıtlanmasıdır. Bu programlar bugün neredeyse tamamlanmış durumdadır.⁽¹⁴⁾ Hawking⁽¹⁵⁾ asimtotik düzlük, uzakta geleceğin kestirilebilmesi, kaynaksız Einstein-Maxwell denklemlerinin sağlanması gibi varsayımlar altında genel durağan denge durumlarının ya statik ya da eksensel simetrik olacağını göstermiştir. Statik hal Israel⁽¹⁶⁾ tarafından kesin sonuca kavuşturulmuş; bu duruma karşılık gelen tek geometrinin Schwarzschild çözümüyle (ya da onun yüklü genellemesiyle) verildiği kanıtlanmıştır. Eksensel simetrik halde ise önce Carter⁽¹⁷⁾ elektrik yüksüz genel çözümlerin iki parametrelili, birbirlerinden bağımsız, aileler oluşturduğunu ispatlamıştır. Daha sonra bu sonuç Robinson⁽¹⁸⁾ tarafından elektrik yükü de içeren biçimde genelleştirilmiş ve bu kez çözümler üç parametrelili ayrı aileler halinde sınıflandırılmıştır. Carter ve Robinson'un bu sonuçları birer saç yok teoremidir. Boşluk durumunda, Kerr çözümünün tekliği de 1975'de Robinson⁽¹⁹⁾ tarafından kanıtlanmış, yüksüz bir kara deliğin durağan denge konumlarının kütle ve açısal momentum parametreleriyle tamamen belirlendiği anlaşılmıştır. Kerr-Newman çözümleri için teklik kanıtı henüz verilememişse de, eldeki sonuçlardan, diğer çözümlerin - bulunsalar bile - kararlı olamayacağını görmek mümkündür.

2. Kara Deliklerin Lineer Tedirgenmeleri

Elektrik yükü bulunmayan, eksenî etrafında dönen, durağan denge konumundaki bir kara deliğin dışında tek mümkün geometrinin Kerr çözümünüyle verildiğini belirtmiştik. Böyle bir kara deliğin çevresindeki astrofiziksel süreçlerin incelenmesi için uygun bir yol Kerr uzay-zamanının lineer tedirgenmelerine bakmaktır. Uzay-zaman tedirgenmelerinin genel ve dikkatli tanımı yapılabilmektedir ⁽²⁰⁾. Bu çerçevede karşımıza çıkan iki temel kavram fon geometrisi ve test alanı kavramlarıdır. Fon geometrisi tedirgemeden önceki uzay-zaman geometrisidir ve Einstein denklemlerinin bir kesin çözümüdür. Test alanları ise bu fonda hareket eden, ilk yaklaştırma düzeyinde geometriyi etkilemeyecek denli küçük, madde alanlarıdır. Bilinen bütün alanların enerji-momentum tensörlerine ikinci mertebeye girmesi nedeniyle bu yaklaştırma tutarlıdır. Dolayısıyla, verilen fon geometrisinde test alanlarının sağladığı denklemlere bakılır. Gravitasyon alanında ortaya çıkan tedirgemeler ise Weyl tensörüyle karakterize edilir; bu tensörün sağladığı özdeşlikler fon geometrisi civarında lineerleştirilip incelenir. Weyl tensörünün tedirgenmelerinin metrik tensörünün tedirgenmelerini de saptayacağı gösterilmiştir. ⁽²¹⁾

Biz bu çalışmada yalnız yüksüz kara delikler üzerinde duracağız ve Kerr uzay-zamanını fon geometrisi olarak ele alacağız. Kerr çözümleri için yay elemanı Boyer-Lindquist ⁽²²⁾ (t, r, θ, ϕ) koordinatlarında ve Ek 1'deki anlaşmalara göre

$$ds^2 = (1 - 2Mr/\Sigma)dt^2 + (4Mar\sin^2(\theta)/\Sigma)dtd\phi - (\Sigma/\Delta)dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \sin^2(\theta)(r^2 + a^2 + 2Ma^2r\sin^2(\theta)/\Sigma)d\phi^2, \quad (I.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada M kara deliğin kütlesi, aM kara deliğin açısal momentumudur ve kısaltma olarak $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ kullanılmıştır. Bu çözümlerin $a^2 \leq M^2$ koşulunu sağladığı kabul edilecektir. Deliğin dışındaki bölge $\Delta > 0$ eşitsizliği ile ve olay ufkunun yeri de $\Delta = 0$ denkleminin büyük köküyle belirlenmektedir. Kerr çözümlerinin iki Killing vektörü kabul ettiği yukarıda kullanılan koordinat sisteminde açıktır. Kerr çözümlerinin daha temel bir simetrisi de vardır. Penrose ve Walker⁽²³⁾ bu uzay-zamanların bir Killing²⁻spinörü kabul ettiğini ve bu niceliğin yeni bir hareket sabiti tanımladığını göstermişlerdir. Bu nedenle Kerr fonunda jeodezik ve kütlesi skalar alan denklemleri değişkenlere ayırma yöntemi ile çözülebilmektedir⁽²⁴⁾. Bu özellikler diğer tedirgemelerce de paylaşılmakta, tedirgemelere hükmeden denklemler kuplajsız adi diferansiyel denklemler biçimine sokulabilmektedir⁽²⁵⁾. Kerr uzay-zamanının tedirgemeleri Teukolsky⁽²⁶⁾ Chandrasekhar⁽²⁷⁾ ve başka bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Daha önce de Schwarzschild kara deliklerin tedirgemeleri Doroshkevitch al.⁽²⁸⁾, Vishveshwara⁽²⁹⁾, Price⁽³⁰⁾ ve diğerleri tarafından çözümlenmişti.

Test alanlarının spinlerini s ile gösterirsek, kütesiz skalar ($s = 0$), nötrino ($s = \pm \frac{1}{2}$), elektromanyetik ($s = \pm 1$) ve gravitasyonel tedirgeme ($s = \pm 2$) alanlarının Kerr fonunda multipol açılımları yapılabilir. Multipoller ℓ simgesiyle sınıflandırılınsın; monopoller için $\ell = 0$, dipol alanları için $\ell = 1$, vs. olsun. Dinamik tedirgeme-

analizlerinden şu temel sonuca ulaşılmıştır: Gravitasyonel çökme sürecinde, yukarıda sayılan test alanlarının ancak $\ell < |s|$ multipollerini korunabilmektedir. Örneğin, elektromanyetik alan yalnız monopol parçasını (elektrik yükü), gravitasyonel alan ise hem monopol (kütle) hem de dipol (açısal momentumu) parçasını saklayabilmektedir. Diğer bütün multipoller ya olay ufkundan içeriye ya da sonsuza ışınmakta ve kara delik geometrisinde bir iz bırakmamaktadır. Bu özellik "gravitasyonel çökme sürecinde ışınabilecek her şey ışınacaktır" şeklinde özetlenebilir⁽³¹⁾. Işınabilen multipollere karşılık gelen değişkenlerin ilginç bazı özellikleri de gözlenmiştir. Bu değişkenler korunan multipolleri içeren değişkenlerden ayrı bir biçimde ortaya çıkmaktadır. Teukolsky⁽²⁶⁾, Newman ve Penrose formalizmini⁽³²⁾ kullanarak ışınabilen tedirgemelere hükmeden denklemlerin ortak bir biçimde yazılabileceğini göstermiştir. Işınabilen ve spini s olan ($s = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$) alanı Φ ile gösterir ve bu alanın Killing koordinatlarına bağımlılığını

$$\Phi = R(r) S(\theta) e^{i\sigma t} e^{im\phi}, \quad (I.2)$$

şeklinde alırsak ki, σ artı işaretli bir sabit, m ise diğer bir sabittir, radyal denklemler

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{1+s} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 + 2is(r-M)K}{\Delta} - 4is\sigma r - \lambda \right) R = 0 \quad (I.3)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Açısal değişkenler ise

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\sigma} \right) + \quad (I.4)$$

$$(a^2 \sigma^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + 2a\sigma \cos \theta - \frac{2m\sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + E - s^2)S = 0$$

denklemlerini sağlamaktadır. Burada $K = (r^2 + a^2)\sigma + am$ şeklinde bir kısaltmadır ve ayırma sabiti $\lambda = E + a^2 \sigma^2 + 2am\sigma - s(s + 1)$ bağıntısıyla verilmektedir.

Lineer teditgeme yaklaşımı saç yok teoremlerinin kanıtlanması için de yeterli ve elverişli bir çerçeve oluşturmaktadır. Burada saç yok teoremlerinin Einstein denklemlerinin lineer olmıyan kesin çözümleri için geçerli olduğu anımsanabilir. Lineer olmayan bu problemin lineer teditgeme yaklaşımıyla çözümlenebilmesi genel bir gözleme dayanmaktadır⁽³³⁾. Lineer olmayan bir denklem sistemi düşünürsek, bu denklemlerin her kesin çözümünden lineerleştirilmiş bir çözüm imal edebiliriz. Öte yandan denklemlerin kendilerini lineerleştirip, bunlardan elde edilecek lineer çözümlere bakabiliriz. Her lineer çözümün lineerleştirilmiş bir kesin çözüme karşılık gelmesi beklenemezse de bu çözüm sınıfı lineerleştirilmiş çözümleri de içermektedir. Bu nedenle aranan tipte lineer çözümlerin bulunmadığını göstermek lineer olmayan teoride de aynı tipten çözümlerin yokluğunu kanıtlamak için kullanılabilir. Bu gözlemde yola çıkarsak, (I.3)'den ısıyabilen modların yeni saçlara yolaçmayacağı hemen gösterilebilmektedir. Radyal Teukolsky denklemleri diye bilinen bu denklemlerin durağan ($\sigma = 0$) çözümlerine bakılırsa, bu tür çözümlerin ya olay ufkunda ya da sonsuzda patladığı görülecektir. Dolayısıyla, madde kuplajlı Einstein denklem-

lerinin de bu modların karşılık gelen durağan, regüler kesin çözümleri bulunmayacaktır. Örneğin $s = \pm 1$ özellemesiyle, Einstein-Maxwell denklemlerinin elektrik dipolu ölçülebilecek kara delikleri açıklayan regüler kesin çözümlerinin bulunmadığı sonucuna varılabilir. Halbuki, burada doğrudan ilgilenmediğimiz, monopol test alanına bakılmış olsaydı lineerleştirilmiş Kerr-Newman çözümü elde edilebilirdi.

3. Süpersimetri ve Süpergravite

Kerr geometrisinde ele aldığımız sıfır durgun kütleli alanları keyfi spinli bir test alanının özel durumları olarak düşünmek mümkündür. Keyfi bir fonda, sıfır durgun kütleli ve keyfi s spinli ($s > 0$) bir test alanının $2s$ indisli, tamamen simetrik bir $\Phi_{AB\dots M}$ 2-spinörüyle temsil edilebileceği bilinmektedir⁽³⁴⁾. Alan denklemlerinin Minkowski uzayında bilinen biçimleri de minimal kuplaj tartışmasıyla basitçe genelleştirilebilmektedir. Nitekim Schwarzschild fonunda, tam sayı spinli haller için, bu denklemler Price⁽³⁰⁾ tarafından incelenmişti. Böyle bir alanın $2s+1$ bağımsız, kompleks bileşeninin sağladığı denklemler Newman ve Penrose (NP) formalizmiyle yazılmış ve durağan çözümler hakkında gene aynı sonuca varılmıştı: bu tür çözümler sonsuzda ve olay ufkunda, iki sınırda birden, sonlu değerlere sahip olamıyordu. Ne var ki yüksek spinli ($s \neq 2, s > 1$) alan denklemlerinin bir takım tutarsızlıkları da eskiden beri bilinmekteydi⁽³⁵⁾. Alan denklemleri minimal kuplaj yoluyla basitçe genelleştirilince alanların sağlamaları gereken ek koşullar ortaya çıkıyordu. Bu koşullar yüzünden ilk değer problemi ışıık-gibi yüzeylerde tutarlı bir biçimde ortaya konulamıyordu. Üstelik çözümlerin bulunabileceği fon geometrileri üze-

rinde de kısıtlamalarla karşılaşılıyordu. Sıralamada en önde gelen Rarita-Schwinger alanında ($s=3/2$) bu sorunların tümünü gözlemek mümkündür (36) .

Rarita-Schwinger alanının gravitasyonla tutarlı kuplajı 1976 yılında süpergravite kuramının ortaya atılmasıyla başarılmıştır⁽³⁷⁾⁽³⁸⁾. Üstelik elde edilen sonucun çok daha genel bir planda önemli olduğu görülmüştür. Süpergravite Einstein kuramının basit süpersimetrik genellemesidir. Süpersimetri⁽³⁹⁾ bir derecelendirilmiş Lie cebirine dayanan, yerel kuvantum alanlarının sürekli simetrisidir. Süpergravite kuramını ve dayandığı süpersimetri kavramını çekici kılan bazı özellikleri şöyle sırayabiliriz:

1. Süpersimetri değişik spinli kuvantal alanları birbirlerine dönüştürebilen, kuvantum alan teorisiyle tutarlı tek simetri olarak bilinmektedir. Bu özellik sayesinde "yol-yok teoremleri" diye anılan engeller aşılarak uzay-zaman ve iç simetrilerin birleştirilmiş bir şekilde ele alınabilmesi mümkün olmuştur. Süpergravite Süpersimetri'nin yerel alan teorisidir. Yerel sünersimetri gravitasyonun ithalini gerektirmekte; graviton ($s=2$) ve gravitino ($s=3/2$) alanları birbirlerini karşılayan iki ayar alanı biçiminde ortaya çıkmaktadır. "Ayar teorisi yapısı gravitasyonun diğer etkileşmelerle birleştirilmesi yolunda ümit vericidir⁽⁴⁰⁾."

2. Süpergravite Einstein teorisini içermektedir. Hamilton yaklaşımında ortaya çıkan bağların cebirine dayanılarak süpergravitenin Einstein kuramının kare kökü şeklinde yorumu yapılabilmektedir⁽⁴¹⁾. Bu anlamda iki teorinin arasındaki ilişki Dirac alanıyla Klein-Gordon alanı arasındakine benzemektedir.

3. Süpergravite teorisinin kuvantal özellikleri Einstein teorisindekilerden daha iyidir. Gravitasyon alanının kuvantalaştırılmasında önemli sorunlarla karşılaşmaktadır. Kuvantalaştırılmış genel relativitede sonsuzluklar ortaya çıkmakta, teori renormalize edilememektedir. Süpersimetri invaryansı aracılığıyla süpergravite kuramı bu sonsuzlukların bir kısmından kurtulmaktadır. Örneğin, genel relativitenin tersine, süpergravite iki halka düzeyinde renormalize edilebilmektedir. Üç halka düzeyinden ise bu teoride de simetrinin dışarılamadığı sonsuzlukların bulunması mümkündür⁽⁴²⁾.

4. Amaç

Bizim bu çalışmada irdelemeye çalışacağımız soru süpergravite kuramının kara delik problemine neler getirebileceğidir. Klasik genel relativite çerçevesindeki önemli kara delik problemlerinin çoğu tümünden çözümlenmiş durumdadır. Bugün artık gökyüzünde bir çok kara delik adayı bulunmakta ve sorunlar, içersinde gözlemin de önemli bir rol oynadığı, kara delik astrofiziğinde ele alınmaktadır⁽⁴³⁾. Öte yandan, kara delikler için Hawking etkisinin⁽⁴⁴⁾ bulunmasıyla kuvantalaştırma yolunda önemli ipuçları da ele geçmiştir. İçerdiği ilginç yeni simetriyle süpergravite kuramı da gravitasyonun kuvantalaştırılması yolunda çekici başka bir atılımdır. Kara delikler bu teoride de öngörülmektedir. Genel relativitede tek kara delik çözümü olarak karışımıza çıkan Kerr çözümü süpergravite alan denklemlerini de sağlamaktadır. Acaba süpergravite alan denklemlerinin, "süpersimetrik kara delikler" diye adlandıracağımız, daha genel kara delikleri açıklayan, yarı-klasik çözümleri var mıdır? Süpergravitede, süpersimetri invar-

yansının doğurduğu, yeni bir korunan nicelik ortaya çıkmaktadır⁽⁴⁵⁾. Süperyük diye anılan bu nicelik de kütle ve açısal momentum gibi, sonsuzda bir yüzey integrali aracılığıyla tanımlanabilmektedir. Süperyük acaba yeni bir kara delik parametresi olarak karşımıza çıkacak mıdır? İlgileneceğimiz soruyu bu biçimde daha özelleştirebiliriz. Böylece biçimlenen programın ilk aşamasını kuşkusuz gene saç yok teoremleri düzeyindeki sonuçlar oluşturmalıdır. Dolayısıyla, ilk ele alınması gereken problemi şöyle saptayabiliriz: Kerr çözümlerine sürekli bir biçimde bağlanan, onları süperyükle genelleyen, süpersimetrik kara delik çözümleri var mıdır? Ortaya koyacağımız sonuç bu sorunun olumsuz yanıtı olacaktır. Kara deliklerin hiç süpersaçı yoktur⁽⁴⁶⁾.

Yukarıda açıkladığımız problem ilk kez Cordero ve Teitelboim⁽⁴⁷⁾ tarafından ele alınmıştı. Bu yazarlar, buldukları özel bir statik tediğeme örneğinden yola çıkarak saç yok tahminini ortaya atmışlardı. Bu tahmini destekleyen geniş bir statik tediğeme sınıfı da Urritia⁽⁴⁸⁾ tarafından verilmişti. Sunacağımız tartışmada bu tahminin daha genelde bile doğru olduğu gösterilecek ve dönen, elektrik yüksüz, süpersimetrik kara delikler için saç yok teoremi kanıtlanacaktır. Bölüm II'de süpergravite alan denklemleri ele alınacak ve bu denklemler Rarita-Schwinger alanında lineerleştirilecektir. Bu yaklaştırmayla $s=3/2$ alanının, Einstein boşluk denklemlerini sağlayan bir fonda, test alanı olarak tutarlı bir biçimde yorumlanabildiği görülecektir. Newman-Penrose-Debever⁽⁴⁹⁾ ve Geroch-Held-Penrose⁽⁵⁰⁾ (GHP) formalizmleri kullanılarak test alanının sağladığı denklemler çok kullanışlı yeni biçimlere sokulacaktır. Bölüm III'de saç yok teoreminin kanıtı verilecektir. Bu amaçla önce Rarita-Schwinger denklemlerinin süpersimetri dönüşümle-

riyle sıfıra indirgenebilen çözümleri ayıklanacaktır. Sıfıra dönüştürülemeyen süperyüklerle yolaçan bütün $s=3/2$ alanlarının iki kompleks skalarla Kerr fonunda tamamen belirlendiği saptanacaktır. Bu skalar alan değişkenlerinin sağladığı kuplajsız diferansiyel denklemler sunulacaktır. Bu denklemler değişkenlere ayırma yöntemiyle incelenecek ve bunların $s= \pm 3/2$ Teukolsky denklemleri olduğu gösterilecektir. Rarita-Schwinger alanının kara delik tedirgenmeleri programındaki doğal yeri böylece saptanmış olacaktır. Rarita-Schwinger denklemlerinin, sıfıra dönüştürülemeyen süperyük, olay ufkunda ve sonsuzda regüler, durağan çözümleri bulunmamaktadır. Dolayısıyla süperyük de yeni bir kara delik saçına yolaçmamaktadır.

Çalışmamız sonuçların tartışılması ve Ek'lerle son bulacaktır.

II. RARITA-SCHWINGER ALANININ TEDİRGEME YORUMU

1. Süpergravite Alan Denklemleri

Süpergravite kuramında gravitasyon alanı ortonormal tetrad e_μ^a aracılığıyla, Rarita-Schwinger alanı ise bir ψ_μ vektör-spinörüyle betimlenir. Uzay-zaman ve tanjant uzayı metriklerini, sırasıyla, $g_{\mu\nu}$ ve η_{ab} ile gösterirsek, ortonormal tetrad

$$\begin{aligned}\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b &= g_{\mu\nu} , \\ g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b &= \eta^{ab} ,\end{aligned}\tag{II.1}$$

denklemleriyle tanımlanır. Rarita-Schwinger alanının Majorana koşulu:

$$\psi_\mu = C \bar{\psi}_\mu^T ,\tag{II.2}$$

sağladığı ve spinör bileşenlerinin çarpım altında komutatif olmadığı varsayılır. C yük eşlenikliği matrisidir. Uzay-zaman üzerinde tanımlanmış bulunan bağlantının metrik ve burulmalı olduğu da kabul edilir.

Süpergravite alan denklemleri bir varyasyonel ilkedен elde edilir. Kuramın Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa^2} e R - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\lambda\tag{II.3}$$

biçiminde yazılabilir⁽³⁸⁾. Burada κ gravitasyonel kuplaj sabiti, $e = \det e_\mu^a$ ve R eğrilik skalarıdır. Dirac matrisleri γ 'larla,

tümden antisimetrik sembol $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ ile gösterilmiş, $\epsilon^{1230} = 1$ alınmıştır. Rarita-Schwinger alanının $D_\rho \Psi_\lambda$ türevi ise

$$D_\rho \Psi_\lambda = \partial_\rho \Psi_\lambda + \frac{1}{2} \omega_{\rho ab} \sigma^{ab} \Psi_\lambda, \quad (II.4)$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{4} [\gamma_a, \gamma_b] \quad (II.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bağlantı katsayıları $\omega_{\rho ab}$ ile simgelenmiştir. Bu Lagrange yoğunluğuyla kurulan eylem integrali

$$I = \int \mathcal{L} d^4x \quad (II.6)$$

genel relativideki Palatini yönteminin bir benzeriyle ele alınır; tetrad, bağlantı katsayıları ve $s = 3/2$ alanı bağımsız değişkenler olarak yorumlanır. Eylemin tetrada göre varyasyonundan Einstein denklemlerinin simetrik olmayan bir genellemesi

$$R_a^\mu - \frac{1}{2} e_a^\mu R = \frac{-i\kappa^2}{e} \epsilon^{\mu\lambda\nu\rho} (\bar{\Psi}_\lambda \gamma_5 \gamma_a D_\nu \Psi_\rho) \quad (II.7)$$

elde edilir. Bu işlemde eğrilik skalarının

$$R_{\mu\nu ab} = \partial_\mu \omega_{\nu ab} + \omega_{\mu a}^c \omega_{\nu cb} - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (II.8)$$

$$R_{\mu a} = e^{b\nu} R_{\mu\nu ab}, \quad R = e^{a\mu} R_{\mu a} \quad (II.9)$$

denklemleri aracılığıyla tanımlandığı gözetilir. Eylemin bağlantı katsayılarına göre varyasyonundan da burulma tensörünü $s = 3/2$ alanına bağlayan

$$S_{\mu\nu}^a = \frac{i\kappa^2}{2} (\bar{\Psi}_\mu \gamma^a \Psi_\nu) \quad (II.10)$$

ifadeleri elde edilir. Burulma tensörü

$$S_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_\mu^a{}_c e_\nu^c - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (II.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Varyasyonun bu şekilde cebirsel bir denkleme yolaçmasının nedeni bağlantının metrik olmasıdır. Eylemdeki son bağımsız değişken Ψ_μ 'ye göre varyasyonla ise Rarita-Schwinger alan denklemleri

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \left(\gamma_5 \gamma_\mu D_\nu \Psi_\rho - \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_a S_{\mu\nu}^a \Psi_\rho \right) = 0 \quad (II.12)$$

bulunur. Bu denklemlerdeki son terim önemsizdir; bir Fierz dönüşümüyle sıfıra eşit olduğu gösterilebilir.

Süpergravite kuramının eylemi üç çeşit dönüşüm altında invaryanttır. Lagrange yoğunluğuna $D_\rho \Psi_\lambda$ türevinin yalnızca antisimetrik parçası girmektedir. Bu gözlenince eylemin genel koordinat dönüşümleri altındaki invaryansı açıktır. Serbest tanjant uzayı indisi bulunmadığına dikkat edilince, eylemin tetrad dönmeleri (yerel Lorentz dönüşümleri) altında da değişmez olduğu gösterilebilir. Öte yandan infinitesimal şekilleri

$$\delta e_\mu^a = i\kappa (\bar{\epsilon} \gamma^a \Psi_\mu) \quad , \quad (II.13)$$

$$\delta \Psi_\mu = \kappa^{-1} D_\mu \epsilon \equiv \kappa^{-1} \left(\partial_\mu \epsilon + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \sigma^{ab} \epsilon \right) \quad (II.14)$$

$$\delta \omega_{\mu ab} = B_{\mu ab} - \frac{1}{2} e_{b\mu} B_{ca}^c + \frac{1}{2} e_{a\mu} B_{cb}^c \quad , \quad (II.15)$$

$$B_a^{\sigma\tau} = \frac{-i\kappa}{e} (\bar{\epsilon} \gamma_5 \gamma_a D_\nu \Psi_\rho) \epsilon^{\sigma\tau\nu\rho} \quad , \quad (II.16)$$

denklemleriyle verilen süpersimetri dönüşümlerinin Lagrange yoğunluğu

üzerindeki etkisi bir tam diverjans şekline sokulabilir. (Bu denklemlerdeki $\epsilon = \epsilon(x)$, bileşenleri çarpım altında komutatif olmayan, bir infinitesimal Majorana spinörünü simgelemektedir.) Dolayısıyla, kuramın eylemi süpersimetri dönüşümleri altında da invaryanttır. Östelik bu invaryansın, sözü edilen diğer iki invaryansa göre, daha temel bir rol oynadığı komutatörlerin cebirinden görülebilmektedir. Örneğin, tetrad üzerinde ardarda uygulanan iki süpersimetri dönüşümünün komutatörü bir genel koordinat dönüşümü ve tetrad dönmesinin toplamı biçiminde yorumlanabilir⁽⁵¹⁾.

Bu noktada süpergravite kuramında ortaya çıkan iki yeniliğe dikkat çekebiliriz. Bunlardan birincisi $s = 3/2$ alanının gravitasyonla kuplajının tutarlı bir biçimde yapılabilmesidir. Genel relativite çerçevesinde gözlenen tutarsızlıkları yaratan ek koşullar, kullanılan $s = 3/2$ alan denklemlerinin kovaryant rotasyonu alınınca ortaya çıkmaktaydı⁽³⁶⁾. Süpergravite de ise aynı işlem tam bir özdeşlikle sonuçlanır. Bu amaçla D_λ operatörü (II.12) üzerinde uygulanır, (II.8) ve döngüsel özdeşlik

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} (R_{\lambda\mu\nu}{}^a - D_\lambda S_{\mu\nu}{}^a) = 0 \quad , \quad (II.17)$$

kullanılır, daha sonra da Fierz düzenlemeleri yapılırsa hiç bir ek koşulun ortaya çıkmadığı görülebilir. Yerel süpersimetri invaryansı bu tutarlılığı gerektirmektedir. Süpergravitenin getirdiği diğer bir yenilik ise global süpersimetri invaryansından kaynaklanır. Kuramda süperyük diye adlandırılan, korunan yeni bir spinör niceliği bulunmaktadır. Bu spinör yükü asimptotik düz uzay-zamanlarda

$$S = \frac{1}{2} \oint ds_i [\gamma^i, \gamma^j] \Psi_j, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (11.18)$$

biçiminde, sonsuzda hesaplanan bir yüzey integrali aracılığıyla ifade edilebilmektedir. Bu ifadenin bulunduğu Hamilton yaklaşımında kütle ve açısal momentum nicelikleri de benzer biçimlerde tanımlanmakta ve bu üç yüzey integrali, uzaysal sonsuzda, düz uzay-zaman süpersimetri cebirine göre davranmaktadır⁽⁴⁵⁾.

2. Tedirgeme Denklemleri ve Bunların Yeni Biçimleri

Süpergravite alan denklemlerinden (II.10) aracılığıyla $s = 3/2$ burulma tensörünün ithalini gerektirdiğini görmüştük. Burulmasız bağlantı katsayılarını $\omega_{\mu ab}(S = 0)$ şeklinde yazar, burkulma (contortion) tensörünü

$$K_{\mu\nu\rho} = -S_{\mu\nu\rho} + S_{\nu\rho\mu} - S_{\rho\mu\nu} \quad (II.19)$$

ve

$$\omega_{\mu ab} = \omega_{\mu ab}(S = 0) + K_{\mu ab}, \quad (II.20)$$

bağıntısını anımsarsak, $\Psi_\mu = 0$ halinde tekrar simetrik bağlantıya ve boşluk Einstein denklemlerine dönüldüğü daha açık bir biçimde ortaya çıkar. Bu özelliği saptadıktan sonra, sıfırdan farklı $s = 3/2$ alanlarının nelere yolaçabileceğini incelemek üzere ilk adım olarak, alan denklemlerini Ψ_μ alanına göre lineerleştirebiliriz. Bu amaçla Rarita-Schwinger alanında ikinci ya da daha yüksek mertebeden terimleri alan denklemlerinde ihmal edelim. Rarita-Schwinger alanı burulma tensörüne ikinci mertebeye girmektedir. Dolayısıyla, lineer yaklaşı-

ma düzeyinde burulma tümünden ihmal edilir ve bu yüzden (II.7) gene boşluk Einstein denklemlerine iner:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (II.21)$$

Bu kez elimizde bir de (II.12)den elde edilen

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \gamma_5 \gamma_\mu D_\rho \psi_\lambda = 0, \quad (II.22)$$

Rarita-Schwinger denklemi kalmıştır. Bu lineer denklemlerdeki $D_\rho \psi_\lambda$ türevi artık simetrik bağlantıya göredir. Öte yandan, infinitesimal süpersimetri dönüşümlerini ele alırsak, önce (II.13) ve (II.15) den elde edilen

$$\delta e_\mu^a = 0, \quad \delta \omega_{\mu ab} = 0 \quad (II.23)$$

denklemleriyle yerel süpersimetri dönüşümlerinin bu yaklaştırma düzeyinde geometriyi etkilemediğini görürüz. Rarita-Schwinger alanı ise gene

$$\delta \psi_\mu = \frac{1}{\kappa} D_\mu \epsilon \quad (II.24)$$

kuralına göre dönüşmektedir. Dolayısıyla süpergravite, lineer $s = 3/2$ alanı yaklaştırmasında, boşluk Einstein denklemlerini sağlayan bir fon ve bu geometride hareket eden bir $s = 3/2$ test alanı biçiminde karşımıza çıkar.

Elde edilen bu sonuç tabii akla hemen tutarlılık sorusunu getirecektir. Öte yandan (II.24) aracılığıyla bir süpersimetri dönüşü-

müyle bazı $s = 3/2$ alanlarının sifira indirgenebileceğini görüyoruz. Bu işlemi diğer yönde, boşluktan bir sınıf $s = 3/2$ alanının türetilmesi şeklinde de düşünebiliriz. Ayar dönüşümleriyle yaratılan bu tür Rarita-Schwinger alanlarının fiziksel bir önemi bulunmayacağı açıktır. Dolayısıyla, tutarlılık sorusunun yanı sıra süpersimetri dönüşümlerinin doğurduğu bir ayıklama sorunuyla da karşı karşıyayız.

Biz bu sorunları Newman-Penrose-Debever formalizmi diye adlandırabileceğimiz bir çerçeve içerisinde ele alacağız. Bu çerçeve içerisinde $s = 3/2$ alanını $\Psi = \Psi_\mu dx^\mu$ spinör 1-formuyla betimleyecek ve önce Rarita-Schwinger denklemlerinin dış diferansiyel formlarla yazılmış yeni biçimlerini bulacağız. Dirac matrisleri 1-formunu : $\gamma = \gamma_\mu dx^\mu$, bağlantı 1-formlarını: $\omega_{ab} = \omega_{\mu ab} dx^\mu$ kurar, dış türevi d , dış çarpımı $\wedge$ ile gösterir ve

$$D\Psi = d\Psi + \frac{1}{2} \omega_{ab} \sigma^{ab} \Psi, \quad (II.25)$$

kısaltmasını tanımlarsak Rarita-Schwinger denklemlerini kolayca

$$\gamma_5 \gamma \wedge D\Psi = 0, \quad (II.26)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi uzay-zamanın her noktasına, ortonormal tetrad yerine, ışık gibi bir tetrad dikelim. Bu tetradı belirleyen ayaklar $(\ell_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu)$ vektörleriyle gösterilsin; ℓ_μ ve n_μ reel, m_μ ise kompleks, ışık-gibi vektörler olsun. Tetrad vektörleri ve skalarları üzerine konan çizgiler kompleks eşlenikliği simgeleyecektir. Baz vektörlerinin birbiriyle iç çarpımlarından ise yalnız

$$\ell_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1 \quad (\text{II.27})$$

halleri sıfırdan farklı olsun. Tetrad baz 1-formlarını $(\ell, n, m, \bar{m})$ ile gösterirsek, Ek 1'deki anlaşmalara uyan Dirac matrisleri 1-formunu

$$\gamma = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \bigcirc & n & -\bar{m} \\ & -m & \ell \\ \ell & \bar{m} & \\ m & n & \bigcirc \end{pmatrix} \quad (\text{II.28})$$

biçiminde buluruz. Dirac matrisleri bu noktadan sonra tartışmamızda hiç öne çıkmayacak ve γ simgesi başka nicelikler için kullanılacaktır. Rarita-Schwinger alanının Majorana olmasını; (II.2) koşulunu ise, bileşenleri

$$\Psi = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \bar{F}_2 \\ -\bar{F}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.29})$$

biçiminde iki kompleks 1-formla belirleyerek sağlarız. Dış formlar üzerine konan çizgiler de kompleks eşlenikliği simgeleyecektir. Son olarak bağlantı terimi $\omega_{ab}{}^\sigma$ yi ele alalım. Uzay-zaman üzerinde tanımlanmış simetrik, metrik bağlantı $sl(2, \mathbb{C})$ Lie cebirinde değerler alan bir bağlantı 1-formuyla açıklanabilir.⁽⁵²⁾⁽⁵³⁾ Bu bağlantı 1-for-

munu

$$d\ell = (\gamma_0 + \bar{\gamma}_0) \wedge \ell + \gamma_1 \wedge \bar{m} + \bar{\gamma}_1 \wedge m$$

$$dn = -(\gamma_0 + \bar{\gamma}_0) \wedge n + \gamma_2 \wedge m + \bar{\gamma}_2 \wedge \bar{m} \quad (II.30)$$

$$dm = (\gamma_0 - \bar{\gamma}_0) \wedge m + \bar{\gamma}_2 \wedge \ell + \gamma_1 \wedge n$$

$$d\bar{m} = -(\gamma_0 - \bar{\gamma}_0) \wedge \bar{m} + \gamma_2 \wedge \ell + \bar{\gamma}_1 \wedge n$$

denklemlerince tanımlanan $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ 1-formlarıyla kurabiliriz.

Uzay-zaman bağlantısını bu biçimde betimleyince elimize

$$\omega_{ab}{}^{\sigma}{}^{ab} = 2 \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_2 & & \\ \gamma_1 & -\gamma_0 & & \\ & & \bigcirc & \\ & & & -\bar{\gamma}_0 & -\bar{\gamma}_1 \\ & & \bigcirc & -\bar{\gamma}_2 & \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix} \quad (II.31)$$

ifadesi geçer. Artık bu bilgileri (II.26) ya yerleştirerek $s = 3/2$ alan denklemlerinin yeni biçimlerini bulabiliriz. Bu amaçla da kısaltma olarak

$$H_1 = dF_1 + \gamma_0 \wedge F_1 + \gamma_2 \wedge F_2 \quad (II.32)$$

$$H_2 = dF_2 - \gamma_0 \wedge F_2 + \gamma_1 \wedge F_1 \quad (II.33)$$

kompleks 2-formlarını tanımlarsak, Rarita-Schwinger denklemlerinin

$$\ell \wedge H_1 + \bar{m} \wedge H_2 = 0, \quad (II.34)$$

$$n \wedge H_2 + m \wedge H_1 = 0, \quad (II.35)$$

biçiminde yazılabileceğini görürüz.

Tutarlılık sorununu çözümlmek için Rarita-Schwinger denklemlerinin dış türevlerini alarak ek koşulların ortaya çıkmayacağını göstermeliyiz. Bu işleme girişmeden önce uzay-zaman eğrilik 2-formları üzerinde duralım. Uzay-zaman eğriliğini

$$\begin{aligned}\theta_0 &= d\gamma_0 - \gamma_1 \wedge \gamma_2 \\ \theta_1 &= d\gamma_1 - 2\gamma_0 \wedge \gamma_1 \\ \theta_2 &= d\gamma_2 + 2\gamma_0 \wedge \gamma_2\end{aligned}\quad (II.36)$$

denklemleriyle tanımlanan üç kompleks 2-formla temsil edelim. Tartışmanın bundan sonraki bölümlerinde boşluk Einstein denklemlerinin sağladığını da varsayalım. Hodge dual operatörünü $*$ ile gösterirsek, boşluk kabulü altında eğrilik 2-formları

$$*\theta_k = -i\theta_k, \quad (k = 0,1,2), \quad (II.37)$$

özelliğine sahiptir ve

$$\begin{aligned}\theta_0 &= -\psi_2(\ell \wedge n - m \wedge \bar{m}) + \psi_3 \ell \wedge m - \psi_1 n \wedge \bar{m}, \\ \theta_1 &= \psi_1(\ell \wedge n - m \wedge \bar{m}) - \psi_2 \ell \wedge m + \psi_0 n \wedge \bar{m}, \\ \theta_2 &= -\psi_3(\ell \wedge n - m \wedge \bar{m}) + \psi_4 \ell \wedge m - \psi_2 n \wedge \bar{m}\end{aligned}\quad (II.38)$$

biçiminde Weyl tensörünün kompleks tetrad bileşenleri (bkz. Ek 2) ve baz 2-formları cinsinden yazılabilir.⁽⁵³⁾ Şimdi tekrar Rarita-Schwinger denklemlerine dönersek; (II.34) ve (II.35) in dış türevlerini alıp, ve bu işlem sırasında (II.30) ve (II.36) da verilen bilgileri kullanarak

$$[\ell \wedge \theta_0 + \bar{m} \wedge \theta_1] \wedge F_1 + [\ell \wedge \theta_2 - \bar{m} \wedge \theta_0] \wedge F_2 = 0 \quad (\text{II.39})$$

$$[n \wedge \theta_1 + m \wedge \theta_0] \wedge F_1 + [m \wedge \theta_2 - n \wedge \theta_0] \wedge F_2 = 0$$

denklemlerini buluruz. Bu denklemlerde görünen köşeli ayraçlar içindeki terimlere eğrilik 2-formlarının (II.38) de verilen açık biçimlerini yerleştirdiğimizde bunların sıfıra özdeş olduğunu saptarız. Dolayısıyla, kullandığımız $s = 3/2$ alan denklemleri hiç bir ek koşula yolaçmamaktadır ve tutarlıdır.

Tanımladığımız niceliklerle yerel süpersimetri dönüşümlerinin yeni biçimlerini de kolaylıkla bulabiliriz. Kuplaj sabitini ϵ 'un yeniden tanımı içinde yok ettikten sonra, süpersimetri dönüşümlerinin dış formlar cinsinden

$$\psi \rightarrow \psi + D\epsilon \quad (\text{II.40})$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Majorana spinörü ϵ 'un infinitesimal bileşenlerini

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ -\bar{\epsilon}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.41})$$

diye gösterirsek, süpersimetri dönüşümleri altında F_1 ve F_2 'nin davranışları

$$F_1 \rightarrow F_1 + d\epsilon_1 + \gamma_0 \epsilon_1 + \gamma_2 \epsilon_2, \quad (\text{II.42})$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + d\epsilon_2 - \gamma_0 \epsilon_2 + \gamma_1 \epsilon_1, \quad (\text{II.43})$$

ERZURUM ÜNİVERSİTESİ KÜTÜPHANESİ

Kullandığımız bu denklemler GHP formalizmi⁽⁵⁰⁾ aracılığıyla daha da saydam biçimlere sokulabilmektedir. Bu amaçla uzay-zamanda geometrik olarak belirlenmiş iki, reel, ışık-gibi yönün bulunduğunu ve tetradın ℓ ve n ayaklarının bu yönlerde seçildiğini kabul edelim. Bu iki ışık-gibi yönün invaryant kalması koşulu mümkün tetrad dönmelerini

$$\begin{aligned}\ell &\rightarrow z\bar{z}\ell, \\ n &\rightarrow z^{-1}\bar{z}^{-1}n, \\ m &\rightarrow z\bar{z}^{-1}m, \\ \bar{m} &\rightarrow z^{-1}\bar{z}\bar{m},\end{aligned}\tag{II.44}$$

dönüşümlerine kısıtlayacaktır. Burada z kompleks bir parametredir. Bu dönüşümlerin bağlantı üzerindeki etkisi

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\rightarrow z^2\gamma_1 \\ \gamma_2 &\rightarrow z^{-2}\gamma_2 \\ \gamma_0 &\rightarrow \gamma_0 + \frac{dz}{z}\end{aligned}\tag{II.45}$$

şeklinde olacaktır. Eğrilik 2-formlarının (II.44) altındaki davranışları ise

$$\begin{aligned}\theta_1 &\rightarrow z^2\theta_1 \\ \theta_2 &\rightarrow z^{-2}\theta_2 \\ \theta_0 &\rightarrow \theta_0\end{aligned}\tag{II.46}$$

şeklinde. Bu dönüşümlerde gözlenen iki ayrı davranış türünden yola çıkarak bütün tetrad niceliklerini iki sınıfta toplayacağız. İlginç

bulacağımız sınıftaki keyfi bir niceliğe n dersek, bu sınıfı

$$n \rightarrow z^p \bar{z}^q n \quad (II.47)$$

davranış biçimiyle tanımlayacağız ve (p,q) çiftine niceliğin GHP tipi diyeceğiz. Burada p ve q iki tamsayıdır. Örneğin $\ell: (1,1)$, $\gamma_1: (2,0)$ tipinde niceliklerdir. θ_0 'ın tipi ise $(0,0)$ dır. (II.47) ile belirlenen niceliklerin bir derecelendirilmiş cebir oluşturduğu gösterilebilir⁽⁵³⁾. Öte yandan (II.45) aracılığıyla, γ_0 'ın bu sınıftan olmadığını görüyoruz. Bu nicelik indirgenmiş bir asal lif demetinde tanımlanmış bağlantı şeklinde yorumlanabilmektedir⁽⁵⁴⁾. Bağlantı 1-formu γ_0 'ı kullanarak (II.47) yi sağlayan nicelikler üzerinde kovaryant bir diferansiyel operatörü kuralım. Bu operatörü $\mathcal{D}$ ile simgelersek, n üzerindeki etkisini şöyle tanımlayacağız:

$$\mathcal{D}n = dn - p\gamma_0 \wedge n - q\bar{\gamma}_0 \wedge n \quad (II.48)$$

Uzay-zamanda iki invaryant, ışık-gibi yönün bulunması halinde, bütün tetrad hesapları sözünü ettiğimiz cebir içine hapsedilebilmektedir. Bu hesaplar üstelik genel koordinat dönüşümlerine göre invaryant, tetrad dönmeleri altında ise kovaryant bir biçimde yapılabilmektedir. Kovaryansın nedeni $\mathcal{D}$ operatörün GHP tipini değiştirmemesi; $\mathcal{D}n$ 'nın da n gibi (p,q) tipinde olmasıdır. Şimdi bu derecelendirilmiş cebir içerisindeki önemli bazı niceliklere göz atalım. Önce, (II.30) denklemlerinden $\mathcal{D}$ operatörünün baz 1-formları üzerindeki etkisini okuyabiliriz:

$$\mathcal{d}\ell = \gamma_1 \wedge \bar{m} + \bar{\gamma}_1 \wedge m, \quad (II.49)$$

$$\mathcal{d}n = \gamma_2 \wedge m + \bar{\gamma}_2 \wedge \bar{m}, \quad (II.50)$$

$$\mathcal{d}m = \gamma_1 \wedge n + \bar{\gamma}_2 \wedge \ell, \quad (II.51)$$

$$\mathcal{d}\bar{m} = \bar{\gamma}_1 \wedge n + \gamma_2 \wedge \ell. \quad (II.52)$$

(II.36) ile tanımlanan eğrilik 2-formlarına baktığımızda ise bunların ikisinin sadece

$$\theta_1 = \mathcal{d}\gamma_1 \quad (II.53)$$

$$\theta_2 = \mathcal{d}\gamma_2 \quad (II.54)$$

biçiminde tanımlandığını hemen farkederiz. Geriye kalan θ_0 2-formunun başka bir işlevi vardır; biz onu cebirin içindeki γ_1 ve γ_2 ile birlikte

$$\mathcal{d}\mathcal{d}n = -p(\gamma_1 \wedge \gamma_2 + \theta_0) \wedge n - q(\bar{\gamma}_1 \wedge \bar{\gamma}_2 + \bar{\theta}_0) \wedge \bar{n} \quad (II.55)$$

tanımında kullanacağız. Bu yapı çerçevesinde Bianchi özdeşliklerinin yerini ararsak, bunların özel (II.55) uygulamaları olduğunu göreceğiz. Bu özdeşliklerden ikisi doğrudan $\mathcal{d}n$ (II.53) ve (II.54) üzerindeki etkileridir. Üçüncü Bianchi özdeşliği:

$$\mathcal{d}\theta_0 + \gamma_2 \wedge \theta_1 - \gamma_1 \wedge \theta_2 = 0 \quad (II.56)$$

da gene benzer bir biçimde ortaya çıkar: γ_0 'ın tersine, $d\gamma_0$ 'ın (0,0) tipine sahip olduğuna dikkat edersek, (II.56) nın aynı tür bir uygulama olduğunu anlarız.

GHP niceliklerinin ilginç başka bir simetrisi de vardır. Üssü işlemi diye anacağımız ve

$$\ell' = n, \quad m' = \bar{m}, \quad n' = \ell, \quad \bar{m}' = m \quad (II.57)$$

şeklinde tanımlayacağımız dönüşümleri ele alırsak, formalizmdeki her niceliğin ve denklemin bir üssü simetriğinin bulunduğunu gösterebiliriz. (p,q) tipindeki bir nicelik üzerinde bu işlem

$$(\bar{n})' = \overline{(n')}, \quad (n')' = (-1)^{p+q} n \quad (\text{II.58})$$

özelliklerine sahiptir ve n' 'yi $(-p, -q)$ tipinde bir niceliğe, üssülü eşine götürür. Kovaryant $\mathcal{D}$ operatörü bu işlemten etkilenmeyecektir:

$$\gamma'_0 = -\gamma_0, \quad \bar{\gamma}'_0 = -\bar{\gamma}_0 \quad (\text{II.59})$$

Önemli bazı niceliklerin de üssülük eşlerini kaydedelim:

$$\gamma'_1 = \gamma_2, \quad \theta'_1 = \theta_2, \quad \theta'_0 = -\theta_0 \quad (\text{II.60})$$

ve (II.49) ile (II.54) arasındaki her çift denklem numaralı bağıntısının bir üstündekinin üssü simetriği olduğunu belirtelim. Dolayısıyla, GHP formalizminde temel yapı denklemleri olarak (II.49), (II.51) ve (II.53)'ü alabilir, diğerlerini bu denklemlerden üssü işlemiyle elde edebiliriz.

Dış formlarla yazdığımız denklemlerin tetrad bileşenlerini alarak skalar denklem takımları elde etmek de çok kolaydır. NP spin bağlantı katsayılarını

$$\gamma_0 = \gamma \ell + \epsilon n - \alpha m - \beta \bar{m}, \quad (\text{II.61})$$

$$\gamma_1 = -\tau \ell - \kappa n + \rho m + \sigma \bar{m}, \quad (\text{II.62})$$

$$\gamma_2 = \nu \ell + \pi n - \lambda m - \mu \bar{m}, \quad (\text{II.63})$$

açılımlarıyla tanımlar ve dış türevi yönsele türevler cinsinden

$$d\eta = \ell \Delta \eta + n D \eta - m \delta \eta - \bar{m} \bar{\delta} \eta \quad (\text{II.64})$$

şeklinde yazarsak bu işlemleri NP formalizminin standard notasyonu ile yapabiliriz. GHP formalizmini kullanacaksak bu kez bağlantı 1-formu γ_0

$$\gamma_0 = -\epsilon' l + \epsilon l' + \beta' m - \beta m' \quad , \quad (II.65)$$

şeklinde yazar, kovaryant yönsel türevleri

$$\mathcal{D}_n = l \mathcal{F}'_n + l' \mathcal{F}_n - m \mathcal{D}'_n - m' \mathcal{D}_n \quad (II.66)$$

ile belirtir ve bu arada γ_2 nin γ_1' , θ_2 ninde θ_1' olduğuna dikkat ederiz.

GHP formalizmi bize elemanları (II.47) ile belirlenen bir derecelendirilmiş cebir ve bunun üzerinde (II.48) ve (II.55)le tanımlanan $\mathcal{D}$ operatörünü sağladı. Üstelik istersek denklem sayısını da üssü işlemi kullanarak yarı yarıya azaltabiliyoruz. Şimdi Rarita-Schwinger alanının bu yapı içinde nereye oturduğunu görelim. Önce ψ 'nin (II.44) ile temsil ettiğimiz yerel Lorentz dönüşümleri altındaki tavrından, F_1 ve F_2 'nin bu cebir içine düştüğünü saptayalım. F_1 ve F_2 'nin GHP tipleri

$$F_1: (-1,0) \quad , \quad F_2: (1,0) \quad (II.67)$$

dır. Tabii, Majorana spinörü ϵ 'unun infinitesimal bileşenlerinin de tipleri gene $\epsilon_1: (-1,0)$, $\epsilon_2: (1,0)$ dır. Rarita-Schwinger alan 2-formlarına baktığımızda, (II.32) ve (II.33) ün

$$H_1 = \mathcal{D} F_1 + \gamma_2 \wedge F_2 \quad (II.68)$$

$$H_2 = \mathcal{D} F_2 + \gamma_1 \wedge F_1 \quad (II.69)$$

şeklinde ortaya çıktığını hemen görebiliriz. Yerel süpersimetri dönüşümleri ise

$$F_1 \rightarrow F_1 + \delta \epsilon_1 + \gamma_2 \epsilon_2 \quad (II.70)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + \delta \epsilon_2 + \gamma_1 \epsilon_1 \quad (II.71)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Üstelik $F_2 = iF'_1$; $H_2 = iH'_1$ ve $\epsilon_2 = i\epsilon'_1$ özelliklerini de gösterebiliriz. Dolayısıyla, boşluk Einstein denklemleriyle belirlenen, iki invaryant, ışıık-gibi yöne sahip, fon geometrilerde: (a) Rarita Schwinger test alanı $(-1,0)$ tipinde bir F_1 1-formu ve bunun üssü simetriğiyle betimlenir. (b) Tutarlı alan denklemleri (II.34) ve bunun üssülü eşiyle verilir. (c) Süpersimetri dönüşümleri (II.70) ve bunun üssü simetriğinden ibarettir.

Son olarak süpersimetri dönüşümlerinin $s = 3/2$ alan 2-formları H_1 ve H_2 üzerindeki etkisini saptayalım. (II.70) ve (II.71)i (II.68)'e yerleştirir; ϵ_1 üzerinde (II.55) kuralını kullanır ve (II.54) tanımından yararlanırsak

$$H_1 \rightarrow H_1 + \epsilon_1 \theta_0 + \epsilon_2 \theta_2, \quad (II.72)$$

davranışını ve bu denklem üzerinde üssü işlemiyle de

$$H_2 \rightarrow H_2 - \epsilon_2 \theta_0 + \epsilon_1 \theta_1, \quad (II.73)$$

dönüşümünü buluruz. Bu dönüşümlerin alan denklemlerini sonlu ϵ_1 ve ϵ_2 için bile korunduğunu göstermek (II.39) da karşılaştığımız basit özdeşliklerin kanıtlanmasına eşdeğerdir.

III. SAÇ YOK TEOREMİNİN KANITI

1. Ayarla Türetilmiş Çözümlerin Ayıklanması

Geçen bölümde, boşluk Einstein denklemlerini sağlayan bir fon geometrisinde, tutarlı $s = 3/2$ alan denklemlerini

$$\ell \wedge H_1 + \bar{m} \wedge H_2 = 0 \quad , \quad (III.1)$$

$$n \wedge H_2 + m \wedge H_1 = 0 \quad , \quad (III.2)$$

şeklinde kompleks H_1 ve H_2 2-formları cinsinden basitçe yazmıştık. Bu denklemlerde ortaya çıkan H_1 ve H_2 'nin bazı ilginç özellikleri vardır. Rarita-Schwinger denklemlerinden bu 2-formların

$$*H_1 = -iH_1 \quad , \quad *H_2 = -iH_2 \quad (III.3)$$

özellğine sahip olduklarını hemen gösterebiliriz. (III.3) Rarita-Schwinger denklemlerinin dualite dönmeleri altındaki değişmezliğini⁽⁵⁵⁾ yansıtmaktadır. Öte yandan H_1 ve H_2 nin tetrad bileşenleri dinamik değişkenlerdir. Bulunacak çözümlerin regülerliğini saptamak için H_1 ve H_2 nin regülerliğini incelemek yeterlidir. Bu özellikler de $s = 3/2$ alanının Hamilton tipi çözümlemeleriyle bulunmuştur⁽⁵⁶⁾⁽⁵⁷⁾. Dolayısıyla tartışmamızda temel nicelikler olarak H_1 ve H_2 yi alacağız.

Ayarla türetilmiş çözümler bir süpersimetri dönüşümüyle ortaya çıkan, ters dönüşümle de sıfıra eşitlenebilen F_1 ve F_2 ye karşılık gelirler. Başka bir deyişle bu tür çözümler salt ayardır. Bu sınıftaki en

genel çözüm biçiminin

$$F_1 = \mathcal{A}\epsilon_1 + \gamma_2\epsilon_2 \quad (\text{III.4})$$

$$F_2 = \mathcal{A}\epsilon_2 + \gamma_1\epsilon_1 \quad (\text{III.5})$$

olduğu (II.70) ve (II.71) den görülebilmektedir. Böylece türetilmiş çözümler için alan 2-formlarının

$$H_1 = \epsilon_1\theta_0 + \epsilon_2\theta_2 \quad (\text{III.6})$$

$$H_2 = -\epsilon_2\theta_0 + \epsilon_1\theta_1 \quad (\text{III.7})$$

şeklinde olacağı da hemen (II.72) ve (II.73) den okunabilir. (III.6) ve (III.7) nin (III.4) ve (III.5) in sağlanması için gerekli koşullar olduğu açıktır: eğer elimizde bir (ϵ_1, ϵ_2) çifti varsa (III.6) ve (III.7) sağlanacaktır. Çözümlerde bir ayıklamaya girişmeden önce bu koşulların aynı zamanda yeterli olup olmadığına eğilmeliyiz. Yani, (III.6) ve (III.7) ile verilen her H_1 ve H_2 nin bir ayarla türetilmiş çözüme karşılık geleceğini saptamalıyız. Bu problem Aichelburg ve Urbantke⁽⁵⁸⁾ tarafından incelenmiştir. Biz tartışmamızda bu sorunu şöyle biçimlendireceğiz: H_1 ve H_2 nin (II.68) ve (II.69) la verilen genel tanımlara GHP operatörü $\mathcal{A}$ uygularsak, (II.55) aracılığıyla

$$\mathcal{A}H_1 + \gamma_2 \wedge H_2 = \theta_0 \wedge F_1 + \theta_2 \wedge F_2 \quad (\text{III.8})$$

$$\mathcal{A}H_2 + \gamma_1 \wedge H_1 = -\theta_0 \wedge F_2 + \theta_1 \wedge F_1 \quad (\text{III.9})$$

bağıntılarını buluruz. Bu işlemin ardından denklemlerin sol taraflarına (III.6) ve (III.7) de verilen biçimleri yerleştirir ve bu arada Bianchi

özdeşliklerini kullanırsak

$$(\mathcal{F}\varepsilon_1 + \gamma_2\varepsilon_2) \wedge \theta_0 + (\mathcal{F}\varepsilon_2 + \gamma_1\varepsilon_1) \wedge \theta_2 = \theta_0 \wedge F_1 + \theta_2 \wedge F_2 \quad (\text{III.10})$$

$$-(\mathcal{F}\varepsilon_2 + \gamma_1\varepsilon_1) \wedge \theta_0 + (\mathcal{F}\varepsilon_1 + \gamma_2\varepsilon_2) \wedge \theta_1 = -\theta_0 \wedge F_2 + \theta_1 \wedge F_1 \quad (\text{III.11})$$

denklemlerini elde ederiz. İki tane fark 1-formu:

$$x_1 = F_1 - \mathcal{F}\varepsilon_1 - \gamma_2\varepsilon_2, \quad (\text{III.12})$$

$$x_2 = F_2 - \mathcal{F}\varepsilon_2 - \gamma_1\varepsilon_1 \quad (\text{III.13})$$

tanımlayarak da, (III.10) ve (III.11) i

$$x_1 \wedge \theta_1 = x_2 \wedge \theta_0, \quad (\text{III.14})$$

$$x_2 \wedge \theta_2 = -x_1 \wedge \theta_0, \quad (\text{III.15})$$

şeklinde yazabiliriz. Öte yandan, (III.12) ve (III.13) le belirlenen (F_1, F_2) çiftinin de aynı H_1 ve H_2 ye karşılık gelmesi koşulu nede niyle

$$\mathcal{F}x_1 + \gamma_2 \wedge x_2 = 0, \quad (\text{III.16})$$

$$\mathcal{F}x_2 + \gamma_1 \wedge x_1 = 0, \quad (\text{III.17})$$

olmalıdır. Dolayısıyla sorun (II.16) ve (II.17) yi de sağlayan, sıfır- dan farklı x_1 ve x_2 lerin bulunup bulunamayacağıdır. Eğer sıfır- dan farklı bir (x_1, x_2) varsa (III.6) ve (III.7) yeterli koşul olamaya- caktır. İlgilendiğimiz kara delik problemi için bu sorunu Petrov sı- nıflandırmasında tipi D olan fon geometrileri çerçevesinde ele almak yeterlidir. Bu noktadan sonraki tartışmalarımız yalnız bu tür boşluk uzay-zamanları için geçerli olacaktır.

Fon geometrisini D tipi uzay-zamanlara özellemenin uygun bir yolu ℓ ve n baz 1-formlarını Weyl tensörünün çakışan, asal ışıık gibi yönlerinde seçmektir. Bu seçimin sonunda NP niceliklerinde

$$\sigma = \mu = \kappa = \nu = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$\Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_0 = \Psi_4 = 0 \quad (\text{III.19})$$

basitlikleri elde edilir. Genel biçimleri (II.29) la verilen eğrilik 2-formları da

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= -\Psi_2 (\ell \wedge n - m \wedge \bar{m}) \\ \Theta_1 &= -\Psi_2 \ell \wedge m \\ \Theta_2 &= -\Psi_2 n \wedge \bar{m} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

durumuna iner ve fonun eğriliği Weyl tensörünün sıfırdan farklı tek bileşeni Ψ_2 tarafından belirlenir. $\Psi_2=0$ halinde Minkowski uzayına geçildiği, $\Psi_2 \neq 0$ durumunda ise bu üç kompleks 2-formun lineer bağımsız olduğu açıktır.

Şimdi, aradığımız x_1 ve x_2 yi baz 1-formları cinsinden

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \ell + B_1 n - \tilde{C}_1 m - C_1 \bar{m} \\ x_2 &= A_2 \ell + B_2 n - \tilde{C}_2 m - C_2 \bar{m} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

şeklinde açalım ve bu genel açılımı (III.20) de verilen ifadelerle birlikte (III.14) ve (III.15) e yerleştirelim. $\Psi_2 \neq 0$ varsayımı altında bu işlem bizi

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1 n - C_1 \bar{m} \\ x_2 &= C_1 \ell - B_1 m \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

sonucuna götürür. Böylece problem sıfırdan farklı, (0,1) tipinde bir B_1 tetrad skaları ve bunun üssülü eşinin saptanmasına indirgenir. Bu da (II.16) ve (III.17) ye başvurularak sağlanabilir. Çünkü, bu denklemlere (II.22) de verilen ifadeler yerleştirilince

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}B_1 - \bar{\gamma}_1 C_1) \wedge n &= (\mathcal{A}C_1 - \bar{\gamma}_2 B_1) \wedge \bar{m} \\ (\mathcal{A}C_1 - \bar{\gamma}_2 B_1) \wedge \ell &= (\mathcal{A}B_1 - \bar{\gamma}_1 C_1) \wedge m \end{aligned} \quad (III.23)$$

koşulları ortaya çıkar. Bu koşulların ise ancak

$$\mathcal{A}B_1 - \bar{\gamma}_1 C_1 = 0 \quad , \quad (III.24)$$

$$\mathcal{A}C_1 - \bar{\gamma}_2 B_1 = 0 \quad , \quad (III.25)$$

halinde sağlanabileceği hemen gösterilebilir. Son olarak (III.24) üzerine $\mathcal{A}$ operatörünü uygulayalım. Bu işlem sırasında (II.55), (II.53) ve (III.25) kullanılırsa, sağlanması gerekli

$$B_1 \bar{\theta}_0 + C_1 \bar{\theta}_1 = 0 \quad (III.26)$$

denklemini bulunur. D tipi uzay-zamanlar için eğrilik 2-formlarının lineer bağımsız olması nedeniyle bu denklemin tek çözümü

$$B_1 = C_1 = 0 \quad (III.27)$$

dır. Aynı sonuca (III.25) le başlayıp (III.26) nın üssülü eşini bularak da erişebilirdik. Dolayısıyla, elimizde

$$x_1 = x_2 = 0 \quad (III.28)$$

durumundan başka bir imkân yoktur; (III.6) ve (III.7) ayarla türetilmiş

çözümler için hem gerekli hem de yeterli koşullardır.

Bu gözlemin ışığı altında artık fiziksel ilginçliği bulunmayan ayarla türetilmiş çözümleri ayıklayabiliriz. Bu amaçla genel bir (H_1, H_2) çiftini eğrilik 2-formlarının lineer kombinezonları şeklinde açalım:

$$H_1 = a_0 \theta_0 + a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2, \quad (III.29)$$

$$H_2 = b_0 \theta_0 + b_1 \theta_1 + b_2 \theta_2 \quad (III.30)$$

Bu açılımlarda eğrilik 2-formlarını çarpan nicelikler gerekli GHP tiplerine sahip tetrad skalarlarıdır. Bir süpersimetri dönüşümüyle a_0 ve a_2 den kurtulabileceğimiz (II.72) den açıkça görülmektedir. Ayıklamaya, genellikle hiç bir şey yitirmeden,

$$H_1 = a_1 \theta_1, \quad (III.31)$$

$$H_2 = \tilde{b}_0 \theta_0 + \tilde{b}_1 \theta_1 + b_2 \theta_2 \quad (III.32)$$

açılımlarıyla da başlayabiliriz. Geriye kalan bütün terimler de bağımsız değildir; verilen her (H_1, H_2) Rarita-Schwinger denklemini sağlamalıdır. Bu nedenle de

$$\Psi_2 \tilde{b}_0 = \Psi_2 \tilde{b}_1 = 0 \quad (III.33)$$

olmalıdır. Öte yandan süpersimetri dönüşümlerinin a_1 ve b_2 yi etkilemediğini gene (II.72) ve (II.73) aracılığıyla görüyoruz. Dolayısıyla, D tipi geometrilerde, ayarla türetilemeyen her $s = 3/2$ alanı için, H_1 ve H_2 çok basit

$$H_1 = a_1 \Theta_1 \quad , \quad (III.34)$$

$$H_2 = b_2 \Theta_2 \quad , \quad (III.35)$$

biçimlerine sokulabilmektedir. H_1 ve H_2 nin bu biçimlere sokulabilmesi, verilen çözümün süpersimetri dönüşümleriyle sıfıra indirgenememesi için hem gerekli hem de yeterlidir.

Bu noktada elimizdeki problemle Minkowski uzay-zamanındaki $s = 3/2$ alanları arasındaki önemli farkları belirtmek yararlıdır. Düz uzay-zamanda süpersimetri dönüşümleri H_1 ve H_2 yi değiştiremezler. Ayarla türetilmiş çözümler için F_1 ve F_2 kesin 1-formlardır. Dolayısıyla F_1 ve F_2 kapalı 1-formlardır. Bu özelliklerin ters biçimde sıralanması da yerel olarak doğrudur: kapalı F_1 ve F_2 1-formları kesindirler de. D tipi uzay-zamanlarda ise ayıklama işlemini H_1 ve H_2 yi kullanarak kolayca gerçekleştirdik. Bu işlemle ancak $\Psi_{2\epsilon_2}$ ve $\Psi_{2\epsilon_2}$ tipi terimlerin elde edildiğine ^{dikkat} /edilirse, Minkowski uzay-zamanında ayarı saptayacak bir (ϵ_1, ϵ_2) çiftinin bulunamayabileceği açıktır. Bu nedenle D tipi fonlarda ayarla türetilmiş bir çözümün düz uzay-zaman limiti aynı türden olmayabilir. Gravitasyon alanının cebirsel yapısına dayanan bu özellik ilk kez Cordero ve Teitelboim⁽⁴⁷⁾ tarafından verilen özel çözümde gözlenmiş ve kara delikler için saç yok tahmini bu gözlemden kaynaklanmıştı.

2. Kuplajsız Alan Değişkenleri

Ayarla türetilmeyecek çözümler için $s = 3/2$ alan 2-formlarının biçimlerini (III.34) ve (III.35) ile saptamış durumdayız. Bu denklemler-

re baktığımızda, a_1 in $(-3,0)$ tipinde bir tetrad skaları olduğunu ve b_2 nin onun üssülü eşine $b_2 = ia_1'$ biçiminde bağlandığını görüyoruz. Şimdi de Rarita-Schwinger test alanının salt bu iki kompleks skalarla temsil edilebileceğini göstereceğiz. Başka bir deyişle, a_1 ve b_2 nin F_1 ve F_2 nin bütün tetrad bileşenlerini tamamen belirlediğini kanıtlayacağız. Bu skalar alan değişkenlerinin çok önemli bir özelliğini de, sağladıkları kuplajsız diferansiyel denklemleri bularak ortaya çıkaracağız. Bu amaçla önce (III.8) ve (III.9) a geri dönelim ve H_1 ve H_2 nin (III.34) ve (III.35) de verilen biçimlerini bu denklemlerin sol tarafına yerleştirelim. Bu işlem bize

$$\mathcal{D}a_1 \wedge \theta_1 = (2a_1\gamma_1 + F_1)\wedge\theta_0 + (F_2 - b_2\gamma_2)\wedge\theta_2, \quad (\text{III.36})$$

$$\mathcal{D}b_2 \wedge \theta_2 = -(2b_2\gamma_2 + F_2)\wedge\theta_0 + (F_1 - a_1\gamma_1)\wedge\theta, \quad (\text{III.37})$$

koşullarını verecektir. Sonra da alan 1-formlarının tetrad bileşenlerini

$$F_1 = N_1\ell - L_1n - \tilde{M}_1 m - M_1 \bar{m} \quad (\text{III.38})$$

$$F_2 = N_2\ell - L_2n - \tilde{M}_2 m - M_2 \bar{m} \quad (\text{III.39})$$

açılımlarıyla tanımlayalım. (III.36) ve (III.37) nin skalar eşdeğerlerini bulmak için bu açılımları (III.20), (II.62) ve (II.63) ile birlikte yerlerine yerleştirelim. Böylece

$$\tilde{M}_1 = (\mathcal{F} + 2\rho)a_1 \quad (\text{III.40})$$

$$N_1 = (\mathcal{G} + 2\tau)a_1 \quad (\text{III.41})$$

$$M_2 = (\mathcal{F}' + 2\rho')b_2 \quad (\text{III.42})$$

$$L_2 = (\mathcal{G}' + 2\tau')b_2 \quad (\text{III.44})$$

ve

$$N_2 = M_1 \quad (III.45)$$

$$\tilde{M}_2 = L_1 \quad (III.46)$$

denklemlerini buluruz. Burada gene $\psi_2 \neq 0$ varsayımı kullanılmıştır.

Tetrad bileşenlerinden dördünün a_1 ve b_2 cinsinden belirlendiği artık açıktır. Geriye L_1 ve M_1 kalmıştır. Bu değişkenlerin durumunu incelemek için Ek 3'de verilen Rarita-Schwinger denklemlerinin GHP biçimi kullanılabilir. (III.40) - (III.46) kısıtlamalarını Ek 3'deki denklemlere yerleştirirsek, L_1 ve M_1 için

$$\gamma' L_1 = (\bar{E} - \rho) \tilde{M}_1, \quad (III.47)$$

$$\bar{E} L_1 = (\gamma' - \tau') L_2 \quad (III.48)$$

$$\gamma M_1 = (\bar{E}' - \rho') M_2, \quad (III.49)$$

$$\bar{E}' M_1 = (\gamma - \tau) N_1, \quad (III.50)$$

takımını elde ederiz. Öte yandan, temel denklemlerimizden

$$H_1 \equiv dF_1 + \gamma_2 \wedge F_2 = a_1 \Theta_1 \quad (III.51)$$

in tetrad bileşenlerini açıkça yazınca, gene L_1 ve M_1 için (bkz. Ek 3)

$$\bar{E}' L_1 = \bar{E} N_1 + (\bar{\tau}' - \tau) \tilde{M}_1 - \bar{\tau} M_1, \quad (III.52)$$

$$\gamma L_1 = \gamma' M_2 + (\bar{\rho}' - \rho') L_2 - \bar{\rho} M_1, \quad (III.53)$$

$$\gamma' M_1 = \gamma \tilde{M}_1 + (\bar{\rho} - \rho) N_1 - \bar{\rho}' L_1 \quad (III.54)$$

$$\bar{E} M_1 = \bar{E}' L_2 + (\bar{\tau} - \tau') M_2 - \bar{\tau}' L_1 \quad (III.55)$$

denklemlerini buluruz. (III.46) nedeniyle M_1 , L_1 in üssü simetriğine orantılı olmalıdır; bu gözetilince yukarıdaki denklemlerin üssü işlemine göre tutarlı olduğu barizdir. Dolayısıyla, önce yalnızca L_1 in durumu-

nu saptayabilir sonra da M_1 için üssü işlemine başvurabiliriz. Bu reçeteyi kullanabilmek için ise L_1 ile M_1 in kuplajlarını çöze-bilmemiz gerekir. Kuplaj çözümü şöyle yapılabilir: (III.48) e yönsel GHP türevi $\mathcal{F}'$, (III.52) ye de $\mathcal{F}$ türevini uygulayıp $[\mathcal{F}, \mathcal{F}']_{L_1}$ komutatörünü kuralım. GHP komutatörlerinin genel ifadeleri Ek 2'de verilmiştir. İlgilendiğimiz komutatörü L_1 için özeller, gerekli yerlere Ricci özdeşliklerini ve Rarita-Schwinger denklemlerini yerleştirirsek,

$$-\bar{\Psi}_2 L_1 = \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} N_1 - \mathcal{F}' \bar{\mathcal{F}}' L_2 + (\tau' - \bar{\tau}) [(\mathcal{F}' + \bar{\tau}) M_2 + (\mathcal{F}' + \bar{\rho}') L_2] \\ + \mathcal{F}' [(\bar{\tau}' - \tau) \tilde{M}_1] + (\bar{\tau}' - \tau) (\mathcal{F} - \rho) \tilde{M}_1, \quad (III.56)$$

ifadesini buluruz. Tabii, M_1 bu ifadenin üssülü eşiyile:

$$-\bar{\Psi}_2 M_2 = \mathcal{F}' \bar{\mathcal{F}}' L_2 - \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} N_1 + (\tau - \bar{\tau}') [(\mathcal{F} + \bar{\tau}') \tilde{M}_1 + (\mathcal{F} + \bar{\rho}) N_1] \\ + \mathcal{F}' [(\bar{\tau} - \tau') M_2] + (\bar{\tau} - \tau') (\mathcal{F}' - \rho') M_2 \quad (III.57)$$

verilecektir. Bu denklemlerin sağ taraflarında daha önce durumlarını çözümlendiğimiz dört bileşeni görüyoruz. Dolayısıyla, L_1 ve M_1 in temel alan değişkenleri a_1 ve b_2 nin üçüncü ve daha küçük mertebeden türevleri cinsinden yazılabileceği ortaya çıkmıştır.

Şimdi temel denklemlerden (III.51) i yeniden ele alabilir ve yukarıdaki tartışmada kullanmadığımız bileşenine bir göz atabiliriz. Bu bileşen bizi yeni ve önemli bir sonuca götürecektir. Önemli bileşen (III.51) deki $\ell \wedge m$ terimidir:

$$(\mathcal{F}' - \bar{\tau}) N_1 - (\mathcal{F}' - \rho') \tilde{M}_1 = -\Psi_2 a_1 \quad (III.58)$$

Bu ifadedeki N_1 ve $\tilde{M}_1$ in a_1 cinsinden yazılabildiğini artık biliyo-

ruz. (III.58) e (III.40) ve (III.41) de verilen ifadeleri yerleştirirsek, salt a_1 için

$$[(\bar{E}' - \rho')(\bar{E} + 2\rho) - (\bar{\sigma}' - \bar{\tau})(\bar{\sigma} + 2\tau) - \Psi_2] a_1 = 0 \quad (\text{III.59})$$

denklemini buluruz. Diğer alan değişkeninin sağladığı denklemi ise gene üssü işlemiyle kolayca ele geçirebiliriz:

$$[(\bar{E} - \rho)(\bar{E}' + 2\rho') - (\bar{\sigma} - \bar{\tau})(\bar{\sigma}' + 2\tau') - \Psi_2] b_2 = 0 \quad (\text{III.60})$$

Böylece problem büyük bir basitliğe erişti: Rarita-Schwinger alanının D tipi geometrilerdeki çözümleri salt a_1 ve b_2 aracılığıyla gerçekleştirilebiliyor. Bu skalar alan değişkenleri üstelik ikinci mertebeden, kuplajsız, lineer kısmi diferansiyel denklemler sağlıyorlar. Artık tartışmamızı Kerr uzay-zamanına özelleştirebiliriz.

3. $s=\pm 3/2$ Teukolsky Denklemleri

Kerr fonunda (III.59) ve (III.60) değişkenlere ayırma yöntemiyle çözülebilmektedir. Bu özelliği göstermek için yine Boyer-Lindquist koordinatlarında çalışalım ve (I.1) deki kısaltmaları kullanalım. Uzay-zamanın her noktasına Kinnersley tetradını⁽⁵⁹⁾ da dikelim. Kullandığımız koordinat sisteminde Kinnersley tetradının ayaklarını

$$\ell^\mu = [(r^2 + a^2)/\Delta, 1, 0, a/\Delta] \quad (\text{III.61})$$

$$n^\mu = [r^2 + a^2, -\Delta, 0, a] / 2\Sigma \quad (\text{III.62})$$

$$m^\mu = [iasin\theta, 0, 1, i/sin\theta] / [\sqrt{2}(r+iacos\theta)] \quad (\text{III.63})$$

ile temsil edebiliriz. Bu tetrad seçimi sonunda NP spin bağlantı

katsayılarının sıfırdan farklı olanları

$$\rho = -(r - i a \cos \theta)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \tau &= -i a \rho \bar{\rho} \sin(\theta) / \sqrt{2} & , & & \pi \equiv -\tau' = i a \rho^2 \sin(\theta) / \sqrt{2} \\ \mu &\equiv -\rho' = \rho^2 \bar{\rho} \Delta / 2 & , & & \alpha = \pi - \bar{\beta} \\ \beta &= -\bar{\rho} \cot(\theta) / (2\sqrt{2}) & , & & \gamma = \mu + \rho \bar{\rho} (r-M) / 2 \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

şeklinde bulunacak ve Weyl tensörünün sıfırdan farklı tek tetrad bileşeni

$$\psi_2 = M \rho^3 \quad (\text{III.65})$$

ile verilecektir. Bu bilgiler (III.59) ve (III.60)da köşeli ayraçlar içerisindeki diferansiyel operatörleri kurmak için yeterlidir. Bir yandan bu operatörleri kurar diğer yandan da alan değişkenlerinin koordinatlara bağımlılığını

$$a_1 = R_{-3/2}(r) S_{-3/2}(\theta) e^{i\sigma t} e^{im\phi} \quad (\text{III.66})$$

$$b_2 = \rho^{-3} R_{3/2}(r) S_{3/2}(\theta) e^{i\sigma t} e^{im\phi} \quad (\text{III.67})$$

şeklinde alırsak, (III.59) ve (III.60) ı

$$[\Delta \mathcal{D}_{-1/2}^+ \mathcal{D}_c + \mathcal{L}_{-1/2}^+ \mathcal{L}_{3/2}^+ 4i\sigma(r+ia\cos\theta)] R_{-3/2} S_{-3/2} = 0 \quad (\text{III.68})$$

$$[\Delta \mathcal{D}_1^+ \mathcal{D}_{3/2}^+ + \mathcal{L}_{-1/2}^+ \mathcal{L}_{3/2}^+ 4i\sigma(r+ia\cos\theta)] R_{3/2} S_{3/2} = 0 \quad (\text{III.69})$$

biçimine sokabiliriz. Burada Chandrasekhari⁽²⁷⁾ izleyerek, denklemleri

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n &= \partial_r + \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta} \\ \mathcal{D}_n^+ &= \partial_r - \frac{iK}{\Delta} + 2n \frac{r-M}{\Delta} \\ \mathcal{L}_n &= \partial_\theta + Q + n \cot \theta \\ \mathcal{L}_n^+ &= \partial_\theta - Q + n \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

operatörleri cinsinden yazdık. (I.2) deki gibi, gene σ pozitif bir sabit, m diğer bir sabittir ve $K = (r^2 + a^2)\sigma + am$, $Q = a\sigma \sin\theta + m\cos\theta$, n ise bir reel sayıdır. Operatörlerden $\mathcal{D}_n$ ve $\mathcal{D}_n^+$ ın koordinatlarından yalnız r ye bağımlı olduğunu, $\mathcal{L}_n$ ve $\mathcal{L}_n^+$ ın ise salt θ yı içerdiğini görüyoruz. Dolayısıyla, artık tekdüze değişkenlere ayırma ve terimleri toparlama işlemlerine girişebilir, radyal ve açısal değişkenler için dört tane, kuplajsız, adi diferansiyel denklem bulabiliriz. Bu işlemleri tamamlayınca da radyal ve açısal denklem çiftlerinin bir özelliğini gözleriz: çift oluşturan diferansiyel denklemler ortak bir biçimde yazılabilmektedir. Böylece bulduğumuz denklemler

$$\Delta^{\pm 3/2} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{1 \pm 3/2} \frac{d}{dr} R_{\pm 3/2} \right) + \left[\frac{K^2 \pm 3i(r-M)K}{\Delta} \mp 6i\sigma r - \lambda \right] R_{\pm 3/2} = 0 \quad (\text{III.7})$$

ve

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} S_{\pm 3/2} \right) + \quad (\text{III.7})$$

$$\left[a^2 \sigma^2 \cos^2\theta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \pm 3a\sigma \cos\theta \mp \frac{3m\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{9}{4} \cot^2\theta + E - \frac{9}{4} \right] S_{\pm 3/2} = 0,$$

dır. Burada $\lambda = E + a^2 \sigma^2 + 2am\sigma - (9 \pm 6)/4$, ayırma sabitidir. Şimdi tekrar (I.3) ve (I.4) e bakıp bulduğumuz denklemlerin Teukolsky denklemlerinin $s = \pm 3/2$ durumlarından başka bir şey olmadığını görebiliriz.

Rarita-Schwinger alanının kara delik tedicgemeleri problemindeki doğal yerini böylece saptamış olduk. Şimdi önce açısal denklemlere eğilelim ve (III.72) nin $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ de regüler olmasını sınır şartları olarak koyalım. Bu koşullar altında (III.72) ayırma sabiti $E = \pm_{3/2} E_{\ell}^m(a\sigma)$

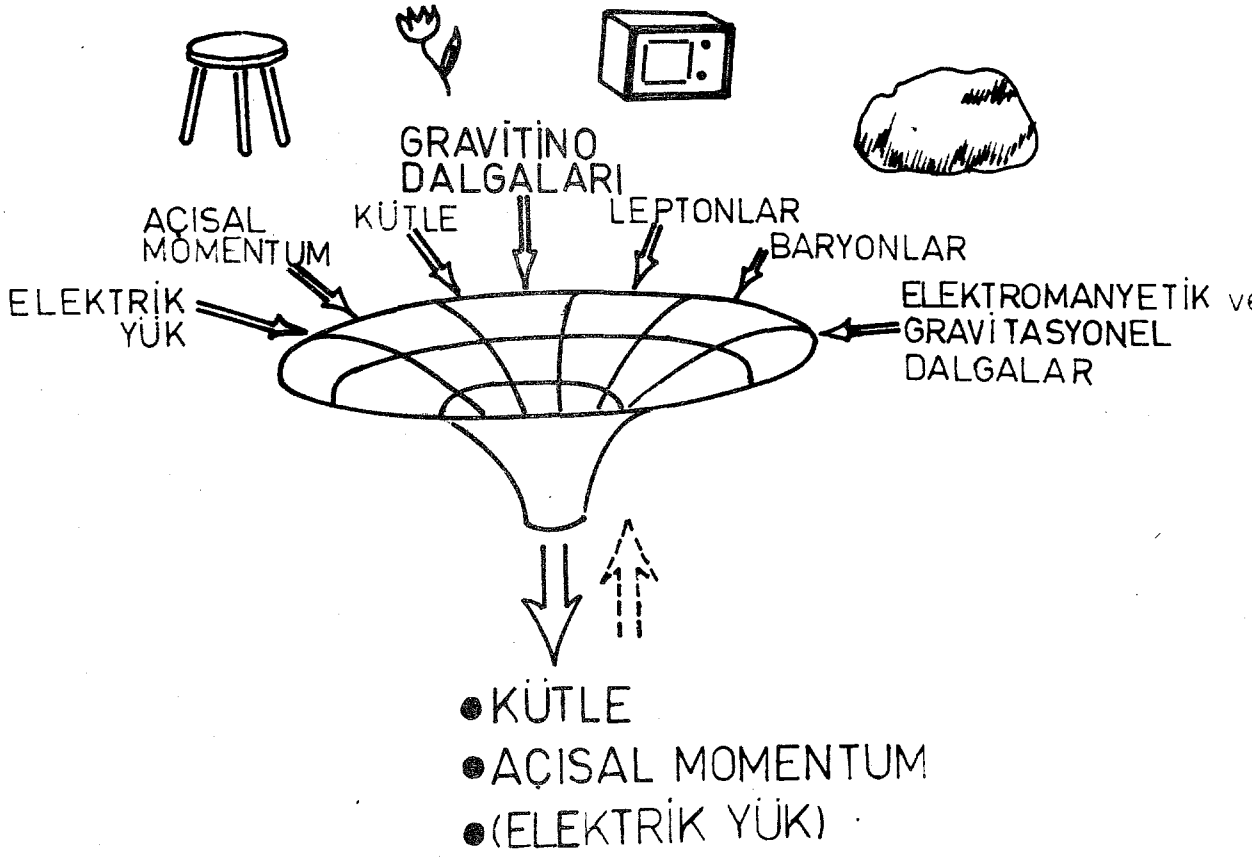
için bir Sturm-Liouville özdeğer problemi oluşturur. Burada ℓ , sabit m ve a_0 için bulunacak özdeğerleri sınıflandırmaktır. En küçük özdeğer için $\ell = \max(|m|, 3/2)$ dir. $0 \leq \theta \leq \pi$ aralığında tam ve ortogonal olan karakteristik fonksiyonlar spin ağırlıklı sferoidal harmonikler⁽²⁶⁾ sınıfındandır. Ayırma sabitini bu şekilde belirledikten sonra radyal denklemlere bakalım. (III.71) in üç singüler noktası vardır. Diğer spin hallerinde olduğu gibi, $\sigma \neq 0$ için, denklemlerin regüler olmayan/singüler noktası sonsuzdur, regüler singüler noktaları ise $\Delta = 0$ denkleminin iki köküyle verilmektedir. Dolayısıyla $\sigma \neq 0$ olunca radyal denklemler yeni transandantal fonksiyonlar tanımlarlar. Bu çalışmada esas ilgilendiğimiz çözümler ise durağan ($\sigma = 0$) olanlarıdır. Bu amaçla (III.71) in analitik özelliklerini $\sigma = 0$ halinde incelersek, saydığımız üç singüler noktanın da regüler singüler noktalar olduğunu görürüz. Durağan hal için (III.71) hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden kesin olarak çözülebilmektedir⁽²⁵⁾⁽⁶⁰⁾. (III.71) in sonsuzda ve olay ufkunda regüler olan durağan çözümleri yoktur.

Rarita-Schwinger alanına göre lineerleştirilmiş süpergravite alan denklemlerinin ayarla türetilemeyen her durağan çözümün ya sonsuzda ya da olay ufkunda patladığını saptamış durumdayız. Dolayısıyla, süpergravite alan denklemlerinin Kerr ailesine sürekli bir biçimde bağlanabilen, onları süperyükle genelleyebilen, regüler, durağan, kesin çözümleri de bulunmayacaktır. Süperyük parametresine sahip her kesin, durağan çözüm bir süpersimetri dönüşümüyle Kerr ailesi içine indirgenebilecektir. Kara deliklerin hiç süper saçı olmadığını böylece kanıtlamış oluyoruz.

IV. TARTIŞMA

Süpergravite kuramı bize tutarlı bir $s = 3/2$ alanı kavramı kazandırdı. Kuramın süpersimetri invaryansı ise yeni bir ayıklama sorunu getirdi. Çalışmamızda, ayıklama işlemi önce genel bir planda incelendi, sonra da D tipi uzay-zamanlar için açıkça tamamlandı. D tipi fonlarda, ayarla türetilemeyen her $s = 3/2$ alanının iki kompleks skalarla tamamen belirlendiği ve alan denklemlerinin kuplajsız, lineer kısmi diferansiyel denklemlere indirgenebildiği kanıtlandı. Bu denklemlerin değişkenlere ayırma yöntemiyle incelenmesi ise yalnız Kerr fonunda ele alındı. Böylece, Rarita-Schwinger alanının gravitasyonel çökme sürecinde koruyabileceği bir multipolu bulunmadığı, süperyükün bir kara delik saçına yolaçmadığı saptandı. Sıfır durgun kütleli, $0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 2$ spinli alanlar için ortak biçimleri önceden bilinen kara delik tedirgeme denklemlerinin $s = 3/2$ durumuna da genellenebildiği gösterildi. Kerr fonunda, Rarita-Schwinger denklemleri $s = \pm 3/2$

Teukolsky denklemlerine indirgenebiliyor. Dolayısıyla, alanın bütün multipolleri ışıyabilen türden. Gerçekçi bir çökme sürecinde Rarita-Schwinger alanı da bulunacaksa, bu alanın bir kısmı olay ufkundan içeriye geri kalanı da sonsuza ışıyacak. Çökmenin sonunda, durağan denge konumuna erişmiş bir kara delik üzerinde de $s = 3/2$ alanının izine rastlanmayacak. Elektrik yükü bulunmayan, dönen bir kara deliğin Kerr tipi durağan denge konumları gene yalnızca kütle ve açısal momentum parametreleriyle belirlenmekte. Elde ettiğimiz sonucu Wheeler'ın⁽⁶¹⁾ resmine (bkz. Şekil 1) yeni bir niceliğin, gravitino dalgalarının eklenmesi şeklinde yorumlayabiliriz.



Şekil 1. Kara deliğe atılan cisimler, bu arada gravitino dalgaları da, kimliklerini yitirmekte, kara delik üzerinde bir iz bırakmamaktadır.

Işınabilen alanların neden yeni saçlara yolaçmadığını anlamak için çökme sürecinde tedirgemelerin dinamiğini incelemek yararlıdır. Schwarzschild fonunda Price'ın⁽³⁰⁾ yüksek tam sayı spinli, sıfır durgun kütleli alanları ele aldığına değinmiştik. O çalışmada, tedirgemelerin dinamik çözümlemeleri kurulan etkin potansiyeller aracılığıyla yapılmış, yeni saçlara izin vermeyen potansiyellerin genel biçimleri tartışılmıştı. Teukolsky denklemlerinden reel, etkin potansiyeller kurmak için geliştirilmiş bir yöntem vardır⁽²⁷⁾. Schwarzschild fonundaki $s = \pm 3/2$ alanı için bu şekilde etkin potansiyeller kurulunca, biçimlerinin Price'ın verdiği ölçütlere tam uyduğu görülmektedir. Dolayısıyla Price teoremi⁽³¹⁾ Rarita-Schwinger alanı için de geçerlidir.

Elimizdeki problemin doğal bir uzantısı, verilen tartışmanın Kerr-Newman fonuna genellenmesidir. Elektrik yüklü, dönen kara delikler için de benzer bir saç yok teoreminin kanıtlanabileceğini tahmin ediyoruz. Öte yandan $s = \pm 3/2$ Teukolsky-Starobinski özdeşliklerinin⁽²⁷⁾ aranması, Chandrasekhar'ın⁽⁶²⁾ etkin potansiyeller için yaptığı ilginç gözlemlerin $s = 3/2$ alanına genellenmesi gibi sorunları çözümlemek de yararlı olacaktır. Bu çalışmada sunulan ayıklama işleminin, eğrilik 2-formlarının lineer bağımsız olduğu başka problemlerde de işe yarayacağını, değişkenlere ayırma işleminin ise bütün D tipi fonlarda geçerli olacağını sanıyoruz.

Tartışmamızın başında süpergravite kuramının kara delik problemine yeni neler getirebileceğini sormuştuk. Elde ettiğimiz sonuçlar kuramın kara delik problemine temel bir yenilik getirmediği yolunda. Bu konuda kesinlemelere girişmek için vaktin erken olduğu kanısındayız.

İçerdiği ilginç simetriye ve matematiksel yapısını anlamak için harcanan emeklere karşın, süpergravite kuramının henüz tam anlaşılmamış yönleri vardır. Örneğin infinitesimal biçimlerini incelediğimiz süpersimetri dönüşümlerinin sonlu biçimleri henüz açıkça yazılabilmemiş değildir. Kuramda ortaya çıkan, çarpım altında komutatif olmayan nice-liklerin doyurucu yorumları da henüz verilememiştir. Biz bu çalışmada alan denklemlerini yarı-klasik bir biçimde ele aldık. Lineer yaklaş-tırma nedeniyle sözünü ettiğimiz zorluklarla karşılaşmadık. Proble-min bugünkü yetkinlik düzeyinde, kuvantalaştırmanın getirebilecekleri-ni kestirmek güç görünüyor. Süpersimetrik kara delik çözümlerinin teklik sorununa eğilmeden önce global özelliklere ayrıntıyla yer veren, matematiksel yönden daha dikkatli çalışmaların tamamlanması da gerekiyor.

EKLER

Ek 1. Anlaşmalar

Uzay-zaman indisleri Yunan harfleriyle $\alpha, \dots, \mu, \dots$, gösterilir ve 0,1,2,3 değerlerini alırlar.

Tanjant uzayı indisleri Latin alfabesinin genellikle ilk harfleriyle, a,b,c..., ile gösterilir ve 0,1,2,3 değerlerini alırlar. Metinde belirtilerek Latin indisleri i,j,k,0,1,2 ya da 1,2,3 değerlerini alabilir.

Tersi belirtilmedikçe, tekrarlanan indisler üzerinde toplama yapılır.

Uzay-zaman metriğinin sinyatürü (+,-,-,-) dir.

Dirac matrisleri γ_a , $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$ ile tanjant uzayı metriğine göre tanımlanmıştır ve $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ dir. Yük eşlenikliği matrisi $C = i\gamma_0 \gamma_2$ dir. Hermit eşlenikliği + ile, transpozisyon T ile gösterilmiştir. Spinör sözcüğü 4-spinörler için kullanılmıştır. Spinör ψ için $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ dır.

Geometrike birim sistemi kabul edilerek $c = \hbar = 1$ alınmıştır.

Ek 2. GHP Formalizmi

Metrik ve simetrik bağlantıya göre kovaryant türev aşağıda ∇_μ ile gösterilmiştir. Üssü işlemi için bkz (II.57).

(a) NP Spin Bağlantı Katsayıları:

$$\kappa = -\nu' = m^\alpha \ell^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha, \quad \sigma = -\lambda' = m^\alpha m^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha$$

$$\rho = -\mu' = m^\alpha \bar{m}^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha, \quad \tau = -\pi' = m^\alpha n^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha$$

$$\beta = -\alpha' = \frac{1}{2} (n^\alpha m^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha - \bar{m}^\alpha m^\beta \nabla_\beta m_\alpha)$$

$$\epsilon = -\gamma' = \frac{1}{2} (n^\alpha \ell^\beta \nabla_\beta \ell_\alpha - \bar{m}^\alpha \ell^\beta \nabla_\beta m_\alpha)$$

(b) Yönel GHP Operatörleri:

$$\mathbb{E} \eta = (\ell^\mu \nabla_\mu - p\epsilon - q\bar{\epsilon})\eta, \quad \mathbb{E}' \eta = (n^\mu \nabla_\mu + p\epsilon' + q\bar{\epsilon}')\eta$$

$$\mathcal{D} \eta = (m^\mu \nabla_\mu - p\beta + q\bar{\beta}')\eta, \quad \mathcal{D}' \eta = (m^\mu \nabla_\mu + p\beta' - q\bar{\beta})\eta$$

(c) Weyl Tensörünün Tetrad Bileşenleri:

$$\Psi_0 = \Psi_4' = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} \ell^\alpha m^\beta \ell^\gamma m^\delta$$

$$\Psi_1 = \Psi_3' = -C_{\alpha\beta\gamma\delta} \ell^\alpha n^\beta \ell^\gamma m^\delta$$

$$\Psi_2 = \Psi_2' = -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} (\ell^\alpha n^\beta \ell^\gamma n^\delta - \ell^\alpha n^\beta m^\gamma \bar{m}^\delta)$$

(d) Ricci Özdeşlikleri

(Boşluk ve (III.18), (III.19) varsayımları altında)

$$\mathbb{E} \rho = \rho^2, \quad \mathcal{D} \rho = (\rho - \bar{\rho}) \tau$$

$$\mathbb{E} \tau = (\tau - \bar{\tau}') \rho, \quad \mathcal{D} \tau = \tau^2$$

$$\mathbb{E}' \rho - \mathcal{D}' \tau = \rho \bar{\rho}' - \tau \bar{\tau}' - \Psi_2$$

(e) GHP Komutatörleri:

(Boşluk ve (III.18), (III.19) varsayımları altında)

$$(\mathbb{F}\mathbb{F}' - \mathbb{F}'\mathbb{F})_n = [(\bar{\tau} - \tau')\gamma + (\tau - \bar{\tau}')\gamma' - p(\psi_2 - \tau\tau') - q(\bar{\psi}_2 - \bar{\tau}\bar{\tau}')]_n$$

$$(\mathbb{F}\gamma - \gamma\mathbb{F})_n = [\rho\gamma - \tau'\mathbb{F} + q(p\tau')]_n$$

$$(\gamma\gamma' - \gamma'\gamma)_n = [(\bar{\rho}' - \rho')\mathbb{F} + (\rho - \bar{\rho})\mathbb{F}' + p(\rho\rho' + \psi_2) - q(\bar{\rho}\bar{\rho}' + \bar{\psi}_2)]_n$$

(f) Bianchi Özdeşlikleri ve Bazı Kullanışlı Bağıntılar:

(Boşluk ve (III.18), (III.19) varsayımları altında)

$$\mathbb{F}\psi_2 = 3\rho\psi_2$$

$$\gamma\psi_2 = 3\tau\psi_2$$

$$\mathbb{F}'\tau = \gamma\rho'$$

$$\gamma\tau' - \gamma'\tau = \rho\bar{\rho}' - \rho'\bar{\rho}$$

$$\mathbb{F}\rho' - \mathbb{F}'\rho = \tau\bar{\tau} - \tau'\bar{\tau}'$$

$$\mathbb{F}\tau - \gamma\rho = (\bar{\rho}\tau - \bar{\tau}'\rho)$$

Ek. 3 Temel Denklemlerin Tetrad Bileşenleri

Rarita-Schwinger alanının tetrad bileşenleri için bkz. (III.38) ve (III.39). $s = 3/2$ alan denklemlerinin NP biçimi için bkz. Kaynak 63.

(a) Tetrad Bileşenlerinin GHP Tipleri:

$$\begin{aligned} L_1 &= iN'_2 : (0,1) \quad , \quad N_1 = iL'_2 : (-2, -1) \\ \tilde{M}_1 &= iM'_2 : (-2, 1) \quad , \quad M_1 = i\tilde{M}'_2 : (0, -1) \end{aligned}$$

(b) Rarita-Schwinger Denklemlerinin Tetrad Bileşenleri:

(bkz.(II.32)-(II.35). Burada spin katsayıları $\sigma=\kappa=\lambda=\nu=0$ varsayılacaktır.)

$$(\mathcal{D}' - \tau')L_1 - (\mathcal{E} - \rho)\tilde{M}_1 + \tau'\tilde{M}_2 = 0$$

$$(\mathcal{D} - \tau)N_1 - (\mathcal{E}' - \rho')M_1 - \rho'N_2 = 0$$

$$(\mathcal{E} - \rho)N_1 + (\mathcal{D}' - \tau' - \bar{\tau})N_2 - \mathcal{E}'L_1 - (\mathcal{E}' - \bar{\rho}')\tilde{M}_2 + \bar{\tau}'\tilde{M}_1 + (\tau' - \bar{\tau})M_1 = 0$$

$$(\mathcal{D} - \bar{\tau}')L_1 - (\mathcal{E} - \rho - \bar{\rho})M_1 + \mathcal{D}\tilde{M}_2 - (\mathcal{D}' - \tau')M_2 - \bar{\rho}'L_2 + (\bar{\rho} - \rho)N_2 = 0$$

ve bu denklemlerin üssülü eşleridir.

(c) (III.51) in Tetrad Bileşenleri:

(Boşluk ve (III.18), (III.18) varsayımları altında)

$$\mathcal{E}'L_1 - \mathcal{E}N_1 + (\tau - \bar{\tau}')\tilde{M}_1 + (\bar{\tau} - \tau')M_1 + \tau'N_2 = 0$$

$$\mathcal{D}'M_1 - \mathcal{D}\tilde{M}_1 + (\rho - \bar{\rho})N_1 + (\bar{\rho}' - \rho')L_1 + \rho'\tilde{M}_2 = 0$$

$$(\mathcal{D}' - \bar{\tau})N_1 - (\mathcal{E}' - \bar{\rho}')\tilde{M}_1 + \Psi_2 a_1 = 0$$

$$(\mathcal{D} - \tau)N_1 - (\mathcal{E}' - \rho')M_1 - \rho'N_2 = 0$$

$$(\mathcal{D}' - \tau')L_1 - (\mathcal{E} - \rho)\tilde{M}_1 + \tau'\tilde{M}_2 = 0$$

$$(\mathcal{D} - \bar{\tau}')L_1 - (\mathcal{E} - \bar{\rho})M_1 + \tau'M_2 - \rho'L_2 = 0$$

KAYNAKLAR

1. S. Chandrasekhar, Ap. J. 74, 81 (1931).
2. L.D. Landau, Phys. Zs. Swjetunion 1, 285 (1932).
3. J.R. Oppenheimer ve H. Snyder, Phys. Rev. 56, 455 (1939).
4. K. Schwarzschild, Berliner Sitzungsber. 189 (1916).
5. G. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Harvard University Press, 1923.
6. T. Regge ve J.A. Wheeler, Phys. Rev. 108, 1063 (1957).
7. E.M. Lifshitz ve I.M. Khalatnikov, Soviet Physics:Uspekhi 6,495 (1963).
8. R. Kerr, Phys. Rev. Lett. 11, 237 (1963).
9. R. Penrose, Phys. Rev. Lett. 14, 57 (1965).
- 10.S.W. Hawking ve G.F.R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge University Press, 1973.
- 11.R. Penrose, Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data, (IAU Symp.63), M.S. Longair(editör), Reidel,1974.
- 12.E.T. Newman,et al., J. Math. Phys. 6, 918 (1965).
- 13.Bazı istisnalar için, bkz. J.D. Bekenstein, Ann. Phys. (N.Y.) 91, 75 (1975) ; P.B. Yasskin, Phys. Rev. D12, 2212 (1975).
- 14.Bu konudaki çalışmaların ayrıntılı dökümü için, bkz. B. Carter, General Relativity, An Einstein Centenary Survey, S.W. Hawking ve W. Israel (editörler), Cambridge University Press,1979, Bölüm:6 ve Black Holes, C. DeWitt ve B.S. DeWitt (editörler), Gordon and Breach, 1972, Bölüm:2.
- 15.S.W.Hawking, Commun. Math. Phys. 25, 152 (1972).

16. W. Israel, Phys. Rev. 164, 1776 (1967).
17. B. Carter, Commun. Math. Phys. 30, 261 (1973).
18. D.C. Robinson, Phys. Rev. D10, 458 (1974).
19. D.C. Robinson, Phys. Rev. Lett. 34, 905 (1975).
20. J. Stewart ve M. Walker, Proc. R. Soc. Lond. A341, 49 (1974).
21. R. Wald, Phys. Rev. Lett. 41, 203 (1978).
22. R.H. Boyer ve R.W. Lindquist, J. Math. Phys. 8, 265 (1967).
23. M. Walker ve R. Penrose, Commun. Math. Phys. 18, 265 (1970).
24. B. Carter, Commun. Math. Phys. 10, 280 (1968).
25. S.A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. 29, 1114 (1972).
26. S.A. Teukolsky, Ap. J. 185, 635 (1973).
27. S. Chandrasekhar, General Relativity, An Einstein Centenary Survey, S.W. Hawking ve W. Israel (editörler), Cambridge University Press, 1979, Bölüm:7.
28. A.G. Doroshkevitch, Ya.B. Zeldovich ve I.D. Novikov, Soviet Physics: JETP 22, 122 (1966).
29. C.V. Vishveshwara, Phys. Rev. D1, 2870 (1970).
30. R.H. Price, Phys. Rev. D5, 2439 (1972).
31. C. Misner, K.S. Thorne ve J.A. Wheeler, Gravitation, Freeman, 1973, s.866.
32. E.T. Newman ve R. Penrose, J. Math. Phys. 3, 566 (1962).
33. M. Berger, Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, B. Keller ve S. Autman (editörler) Benjamin 1969, s.113.
34. R. Penrose, Proc. R. Soc. Lond. A284, 159 (1965).

35. H.A. Buchdahl, Nuovo Cimento 10, 96 (1958); 25, 486 (1962).
36. P. Bell ve P. Szekeres, Int. J. Theor. Phys. 6, 111 (1972);
J. Madore, Phys. Lett. 55B, 215 (1975); G. Gibbons, J. Phys.
A9, 145 (1976).
37. D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen ve S. Ferrara, Phys. Rev.
D13, 3214 (1976).
38. S. Deser ve B. Zumino, Phys. Lett. 62B, 335 (1976).
39. Yu.A. Golfand ve E.P. Likhtman, JETP Lett. 13, 452 (1971);
D.V. Volkov ve V.P. Akulov, JETP Lett. 16, 438 (1972); J. Wess
ve B. Zumino, Nucl. Phys. B70, 39 (1974); A. Salam ve J. Strathdee,
Nucl. Phys. B76, 477 (1974).
40. Ayrıntılı tartışmalar için bkz., P. Fayet ve S. Ferrara, Phys.
Rep. 32, 249 (1977).
- 41..C. Teitelboim, Phys. Rev. Lett. 38, 1106 (1977).
42. S. Weinberg, 27'de anılan kitap, Bölüm:16.
43. K.S. Thorne ve Blanford, 27'de anılan kitap, Bölüm: 8.
44. S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).
45. C. Teitelboim, Phys. Lett. 69B, 240 (1977).
46. R. Güven, Phys. Rev. D (basılmaktadır).
47. P. Cordero ve C. Teitelboim, Phys. Lett. 78B, 80 (1978).
48. L.F. Urrutia, Phys. Lett. 82B, 52 (1979).
49. Bkz. 32; R. Debever, Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. LXII, 662(1976).
50. R. Geroch, A. Held ve R. Penrose, J. Math. Phys. 14, 874 (1973).
51. D.Z. Freedman ve P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D14, 912 (1976).
52. Y. Nutku, Özel görüşme, 1975.
53. R. Güven, J. Math. Phys. 17, 1315 (1976).

54. Bkz. 53; J. Ehlers, Commun. Math. Phys. 37, 327 (1974).
55. S. Deser, J.H. Kay ve K.S. Stelle, Phys. Rev. D16, 2448 (1977).
56. Bkz. 41, 55; R. Tabensky ve C. Teitelboim, Phys. Lett. 69B, 453 (1977).
57. M. Pilati, Nucl. Phys. B132, 138 (1978); E.S. Fradkin ve M.A. Vasiliev, Phys. Lett. 72B, 70 (1977).
58. P.C. Aichelburg, Phys. Lett. 91B, 382 (1980); P.C. Aichelburg ve H.K. Urbantke, Institut für Theoretische Physik, Universität Wien, Önbasım UWThPh-80-21.
59. W. Kinnersley, J. Math. Phys. 10, 1195 (1969).
60. S.A. Teukolsky ve W.H. Press, Ap. J. 185, 649 (1973).
61. J.A. Wheeler, Atti del Convegno Internazionale sul Tema: The Astrophysical Aspects of the Weak Interactions, Quaderno N.157, Accademia Nazionale dei Lincei, 1971, s.133.
62. S. Chandrasekhar, Proc. R. Soc. Lond. A369, 425 (1980).
63. S. Einstein ve R. Finkelstein, J. Math. Phys. 20, 1972 (1979).