

FOR REFERENCE

NOT TO BE TAKEN FROM THIS ROOM

BİR E_6 AYAR ALAN TEORİSİ MODELİ

Meral Serdaroğlu

Bogazici University Library



Doçentlik Tezi
Eylül, 1978

KIZIM EMİNE'YE

Bu tez, sevgili hocam Feza beyin değerli fikirleri, devamlı teşviki, Suha hanım, Ragıp ve ailemin gösterdikleri yakınlık ve anlayış sayesinde yazılabilmiştir. Hepsine minnettarım.

T. Appelquist, I.Bars ve M. Günaydın'ın yapıcı eleştirilerinin, Yale Üniversitesi fizik bölümünün gösterdiği konukseverlik ve hazırladığı çalışma ortamının ve TBTA'ın maddi desteğinin bu çalışmaya önemli katkıları olduğunu belirtmek isterim.

Boğaziçi Üniversitesindeki arkadaşlara ve tezin hazırlanması sırasındaki yakın ilgisi için G. Fındıklı'ya teşekkür ederim.

ÖZET

Ayar alan teorilerinde, son yıllardaki teorik gelişmeler ve hızla çoğalan yeni deneysel bulgular, kuvvetli, zayıf ve elektromanyetik etkileşmeleri birleştiren bir ayar alan teorisinin varlığına inancı yerleştirmiştir. Bu çalışmada, istisnai Lie gruplarından, 78 parametrelili E_6 grubuna göre yerel ayar değişmezliği varsayılarak, birleşik bir ayar alan teorisi modeli gösterilmiştir.

Teorideki ayar bozonları 78 boyutlu "adjoint" temsiline, temel fermiyonlar (lepton ve kuarklar) ise iki, 27 boyutlu spinör temsiline yerleştirilmiştir. Bu yerleştirme yapılırken E_6 grubunun üç maksimal alt grubuna göre ayırım ve zayıf ve elektromanyetik etkileşmelere göre dönüşüm özellikleri belirtilmiştir.

Kendiliğinden simetri bozulmasını sağlayacak Higgs alanları için 27 ve 78 boyutlu temsiller seçilmiştir. Bu alanların etkileşmelerinden doğan potansiyel için hakiki bir minimum enerji durumu ve alanların vakum beklenen değerleri bulunmuştur. Bu vakum çözümü ile, 78 boyutlu temsile giren Higgs alanı, istendiği gibi bazı aracı bozonlara çok ağır kütleler vermektedir. 27 boyutlu Higgs alanı ise, temel fermiyonlar için tarif edilen kütle öz durumları için ağır leptonları, diğerlerinden ayırabilmektedir. Kütle öz durumları, akım öz durumlarında belirtilen lepton matrisine bir dönüşüm uygulanması ile elde edilmektedir. Bu dönüşüm bir Higgs mekanizması ile meydana geliyor ise 27 ve 78 Higgs alanlarına ilaveten sadece leptonlar ile etkileşebilecek başka Higgs alanları gereklidir.

İÇİNDEKİLER

A. GİRİŞ

1. Ayar alan teorileri
2. Weinberg-Salam modeli
3. Kuantum kromodinamiği
4. Birleşik teori görüşü
5. Ayar grubu seçimi

B. TEMEL FERMİYONLAR VE AYAR BOZONLARI

1. Oktonionlar, Jordan matrisleri ve temel fermiyon alanları
2. Temel fermiyonların yerleştirilmesi
3. Ayar bozonları

C. HİGGS ALANLARI VE MÜMKÜN KÜTLE DAĞILIMI

1. 27 ve 78 Higgs alanları için bir vakum çözümü
2. Temel fermiyon kütle dağılımı

D. SONUÇ VE DÜŞÜNCELER

EK 1 Oktonion (Cayley cebiri)

EK 2 İstisnai grupların bazı temsilleri ve

$G^* \times SU^F(3)$ alt grupları

EK 3 27 Temsilinin elektrik yükü ve $SU^L(3) \times SU^R(3)$

dönüşüm özellikleri

KAYNAKLAR

A. GİRİŞ

1. AYAR-ALAN TEORİLERİ

Son yıllarda, parçacık fiziğindeki gelişmeler, zayıf elektromanyetik ve kuvvetli etkileşmeleri bir yerel kuantum alan teorisi içinde birleştirme çabalarını yoğunlaştırmıştır. Bu doğrultudaki çalışmaların esası, Maxwell-Dirac teorisinin özelliklerini zayıf ve kuvvetli etkileşmeleri içine alacak biçimde genelleştirmektir.

Elektromanyetik kuvvetler foton alış verişinden doğar ve fotonun, spinini $1/2$ olan elektrik yüklü nokta parçacıklarla etkileşme biçimini elektrodinamiğin ayar dönüşümleri altında değişmezliği belirler. Elektrik yüklü parçacıkların dalga fonksiyonlarının fazları keyfi bir fonksiyon ile değiştiği takdirde, foton alanına bu fonksiyonun gradyenti ilave edilirse fiziksel sonuçlar değişmemektedir. Keyfi faz fonksiyonu uzay-zaman koordinatlarından bağımsız ise faz envaryansı elektrik yükünün korunduğunu gösterir. Faz fonksiyonu uzay-zaman koordinatlarına bağlı ise, değişmezlik prensibi, foton alanının ancak yüklü parçacıkların dalga fonksiyonlarının ayar dönüşümlerine göre kovaryant türevleri ile bağlanabileceğini ortaya koyar ve Maxwell-Dirac Lagranjiyenini elde edilir. Teorideki yegâne parametre keyfi faz fonksiyonu, yegane yük ise elektrik yükü olduğundan, elektromanyetik etkileşmeler $U(1)$ ayar grubuna göre değişmez kalırlar.

Yang ve Mills⁽¹⁾, 1954 yılında, ayar değişmezliği prensibini izotopik spin grubuna ($SU(2)$) uygulayarak kuantum elektrodinamika benzeyen, yükün birden fazla olduğu Abel (değişimli) olmayan bir ayar teorisi gerçekleştirdiler. Bu modelde, proton ve nötron nükleon alanının yukarı ve aşağı izospin izdüşümlerine sahip bileşenlerini oluşturuyor ve izotopik spin yükünü taşıyan aracı vektör alanlarla, $SU(2)$ ayar değişmezliğini sağlayacak biçimde etkileşiyordu. Aracı vektör alanlar için yazılacak bir kütle terimi, teorinin ayar değişmezliğini bozduğu için aracı vektör mezonlar foton gibi kütleli olup, çekirdekle uzun menzilli kuvvetler doğuyordu. Model gözlemlere uymadığından terkedilmiş fakat ayar değişmezliği prensibinin n-parametrelili ve Abel olmayan bir gruba nasıl uygulanacağını göstermek açısından önemli katkısı olmuştur. Yang-Mills tipi ayar teorilerinin bilinen etkileşmelere uygulanabilmesi için aracı vektör mezonların kütle probleminin çözülmesi gerekmektedir.

Problemin çözümü için simetrinin bozulduğu haller incelenmiştir. Bir Lagrangé fonksiyonunun gösterdiği simetri gerçekteki minimum enerji çözümleri (vakum) ile bozulduğu zaman kütleli "Goldstone" bozon denilen, spini sıfır olan parçacıklar yaratılır.⁽²⁾ Yang-Mills tipi bir ayar alan teorisine kütleli skaler alanlar eklendiği takdirde, vakum durumları bu alanların potansiyelini minimum yapan durumlar olacaktır. Bu minimum enerji durumları için, skaler alanların beklenen değerleri sıfır değilse, içlerinden birinin vakum

olarak seçilmesi halinde, ilk simetri bozulur ve sadece vakumun gösterdiği simetriye indirgenmiş olur. Bu biçimde oluşan bir simetri bozulmasına kendiliğinden simetri bozulması denmektedir. Beklenen değeri sıfır olan yeni alanların tanımlanması ile, bu alanlar, teorideki temel fermiyonlara ve aracı bozonlara kütle kazandırırılar. Kütlesizken iki kutuplanma yönü olan vektör mezonlara, kütle kazanınca üç kutuplanma doğrultusu gerektiğinden üçüncü serbestlik derecesi, yok olan Goldstone bozonu ile elde edilmiş olur. Yang-Mills vektör alanlarına bu şekilde kütle kazandırma yoluna Higgs mekanizması⁽³⁾, teoriye ilave edilen skaler veya psödoskaler (spini sıfır fakat paritesi negatif olan), alanlara Higgs alanları adı verilir.

Higgs mekanizması ile kütle kazandırılan Yang-Mills tipi ayar teorilerinin kuantum elektrodinamiği gibi renormalize edilebildiği ancak 1970'den sonra gösterilmiştir.⁽⁴⁾ Renormalizasyon, yüksek mertebedeki açılım terimlerinden doğan ıraksaklıkların, sonlu sayıda karşıt terim ilave edilerek, yalnızca kütle ve kuplaj sabitlerinin yeniden tarifi ile giderilip, sonlu fiziksel neticeler çıkarılmasıdır.

Politzer, Gross ve Wilczek⁽⁵⁾, renormalizasyon grubu metodunu⁽⁶⁾ uygulayarak, Yang-Mills tipi ayar teorilerinin asimtotik özgürlük adı verilen bir özelliğini göstermişlerdir. Bu özelliğe göre, Abel olmayan ayar teorilerinde etkileşme mesafesi sıfır olurken, teorinin efektif kuplaj sabiti

yavaşça (bir bölü logaritma gibi) sıfıra yaklaştığı için, kısa mesafelerde, teorideki nokta parçacıklar serbest imiş gibi hareket edebilmektedir. Böylece, hadron hedefler üzerine leptonların gönderilmesi ile elde edilen derin esnek olmayan saçılmalarda gözlenen boyutsuzlaşma prensibini anlamak, henüz sağlam matematiksel bir temele oturtulmamış olmasına rağmen, mümkün görünmektedir. Ayrıca, son nötrino deneylerinde gözlenen boyutsuzlaşma prensibinden sapmalar, normal enerjilerde (1 GeV.) efektif kuplaj sabiti birden küçük olan ve asimtotik özgürlüğe haiz bir ayar teorisinden çıkarılanlara uymaktadır. Asimtotik özgürlük kırmızı ötesi kölelik adı verilen bir özelliği öngörmektedir. Buna göre, etkileşme mesafesi azaldıkça yavaşça sıfıra yaklaşan efektif kuplaj sabiti mesafe ile aynı hızda sonsuzlaşıyor ise, elektrodinamikte görülenin aksine, kuvvetler nokta parçacıkların arası açıldıkça arttığından, bu parçacıkları tek başlarına gözleme imkanı ortadan kalkmaktadır. Abel olmayan ayar teorilerinde kuplaj sabitinin bu davranışı, aracı vektör alanların teorideki yükleri taşımalarından doğmaktadır.

2. WEINBERG-SALAM MODELİ

Yang-Mills tipi alan teorilerinin, birleşik bir alan teorisi doğrultusunda ilk uygulanması leptonik zayıf ve elektromanyetik etkileşmeleri birleştiren Weinberg-Salam modeli⁽⁷⁾ olmuştur. Model, izospin ve faz grupları dış çarpımı, $SU(2) \times U(1)$, altında ayar değişmezliği özelliği gösterdiğinden,

teoride 4 kütleli aracı bozon vardır. Lepton alanlarının sol spinör kısımları SU(2) ikililerine sağ spinör kısımları ise SU(2) teklilerine yerleştirilmişlerdir. İzospin simetrisi Higgs mekanizması ile kendiliğinden bozulmakta ve aracı bozonlardan üç tanesi kütle kazanmaktadır. Bunlar zayıf etkileşmelerdeki yüklü ve yüksüz akımları taşıyan $W^{\pm}$ ve Z^0 olarak tanımlanmaktadır. Bozulmadan kalan U(1) grubu, elektrodinamiğin ayar grubu olduğundan dördüncü kütleli bozon foton olarak seçilmektedir.

Weinberg-Salam modelinde ayar grubu basit olmayıp, iki basit grubun dış çarpımı olduğundan sırasıyla, SU(2) ve U(1) gruplarına tekabül eden iki bağımsız kuplaj sabiti, g ve g' vardır. Elektrik yük birimi " e " ve Fermi kuplaj sabiti " G_F " in değerleri kullanılarak, $W^{\pm}$ bozonlarının kütlesi $M_W = (e^2/\sqrt{32} G_F \sin^2\theta_W)^{1/2} = 37.3\text{GeV}/\sin^2\theta_W$ olarak bulunur. θ_W , kuplaj sabitlerinin oranı ile $\tan\theta_W = g'/g$ şeklinde tanımlanan Weinberg açısıdır. Modelin ilk şeklinde olduğu gibi, Higgs alanları, SU(2) grubunun ikili temsiline giriyorsa, Z^0 bozonu ile $W^{\pm}$ bozonlarının kütlesi arasında $M_Z \cos\theta_W = M_W$ bağıntısı elde edilir. Modelin öngördüğü zayıf ve yüksüz akımların etkileşme şekil ve şiddetleri, son nötrino deneylerindeki gözlemlere, $\sin^2\theta_W$ parametresinin değeri 0.2 ile 0.3 arasında olduğu takdirde çok iyi uymaktadır.⁽⁸⁾ Modelde öne sürülen atomik parite bozulması ise henüz gözlenmemiş olup⁽⁹⁾, deneyler devam etmektedir.

Sonuç olarak, leptonik zayıf ve elektromanyetik etkileşmelerin, ayar değişmezliği prensibine dayanılarak birleştirilmesinin mümkün olduğu ve böyle bir teorinin ayar grubunun, en azından $SU(2) \times U(1)$ alt grubuna sahip olması gerektiği kanısı yerleşmiştir.

3. KUANTUM KROMODİNAMİĞİ

Leptonların aksine, hadronlar, çeşitli açısal momentum ve paritelerde, bir çok kuantum sayılarına bağlı olan karışık bir dağılım gösterirler. Bu dağılımı, hadronların, kuark adı verilen nokta parçacıklardan meydana gelmiş sistemler olduğunu varsayarak anlamak mümkündür. İlk gözlenen baryon ve mezonların $SU(3)^{(10)}$ ve $SU(6)^{(11)}$ gibi iç simetrilere göre ailelere ayrılmaları başarılı olmuş ve kuarkların bu iç simetrilerin temel temsillerine ait oldukları öngörülmüştür. En hafif baryonların iç simetri ve spin durumlarına göre simetrik olma özelliği ile, kuarkların spini $1/2$ olan parçacık (fermiyon) olma hassalarını bağdaştırabilmek için, renk adı verilen bir serbestlik derecesi önerilmiştir.⁽¹²⁾ Kuarklar, taşıdıkları, izospin, hiperyük, tılsım vb. gibi kuantum sayılarına göre çeşni (flavor) adı altında çeşitlenmekte ve renk varsayımına göre her bir çeşit üç ayrı renkte bulunmaktadır. Gözlenen hadronlar, renk kuantum sayısının ortalama olarak sıfır olduğu durumlardır. Bir başka deyişle, kuarklar bir $SU(3)$ renk simetrisine haizdirler ve $SU(3)$ renk grubunun

yanlız tekli temsilleri gözlenebilmektedir.

Renk kuantum sayısının, baryon spektroskopisi⁽¹³⁾, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ çözülme genliği ve e^+e^- toplam tesir kesitleri ile kanıtlanan varlığı, sadece global bir renk simetrisine işaret etmektedir. SU(3) renk simetrisinin yerel bir özellik olduğu varsayıldığı takdirde ise Yang-Mills tipi bir ayar alan teorisi kurulabilir. SU(3) renk grubuna göre yerel ayar değişmezliği prensibine dayanan bir alan teorisinde, SU(3) grubu sekiz parametrelili olduğundan, sekiz dörtlü vektör potansiyeli bulunmaktadır. Bu vektör alanların renkli, kütlesiz kuantalarına glüon adı verilmektedir. Değişik çeşnilerde, renkli kuarklar ise teorideki temel fermiyonları oluşturmaktadır. Kuantum elektrodinamiğine şeklen benzemesinden dolayı, bu teoriye kuantum kromodinamiği adı verilmiştir.

Kuantum kromodinamiği, Yang-Mills tipi, renormalize edilebilen, Abel olmayan bir ayar alan teorisi olduğundan, yukarıda değinilen, asimtotik özgürlük, kırmızı ötesi kölelik gibi özellikler gösterir. Bu özelliklerin kuark ve glüonların gözlenmemesini izah edeceği beklenmektedir. Ayrıca, kuantum kromodinamiği, akım cebirleri, kısmi korunan aksiyel akım (PCAC), kiral SU(3)xSU(3) simetrisi, bu simetrinin bozulma yönü gibi başarılı olmuş varsayımları, tabii olarak ihtiva etmektedir. Kuantum kromodinamiği, deneysel verilerin henüz yeterli olmamasına rağmen, kuvvetli etkileşmelerin mevcut tek alan teorisi olarak kabul edilmektedir.⁽¹⁴⁾

4. BİRLEŞİK TEORİ GÖRÜŞÜ

Kuark ve leptonlar için ayar alan teorilerinin mevcudiyeti ve bu alan teorilerinin bütün farklılıklarına rağmen, ayar değişmezliği prensibinden doğmuş olması, bütün etkileşmeleri bir ayar alan teorisi çerçevesinde toplayabilme ihtimalini ortaya çıkarmıştır.

Birleşik bir teorideki temel fermiyonlar kuark ve leptonlardan meydana gelmektedir. Kuarklar renkli olup glüon alış verişi ile kuvvetli etkileşmeler yapabilirken leptonlar, renksiz olduklarından, sadece zayıf ve elektromanyetik kuvvetleri hissetmektedirler. Renk gözönüne alınmadığı takdirde, kuarkların zayıf ve elektromanyetik etkileşme kuplajları leptonlar gibi olduğundan, kuark çeşnileri zayıf etkileşmelerle belirlenmektedir. Zayıf etkileşmelerde gözlenen ayırım kuralları (selection rules), kuarkların çeşnilerine dayanılarak izah edilmektedir. İlk kuark modelindeki üç kuarka (u,d,s), tılsım kuantum sayısı taşıyan bir dördüncü ilave edilmesi ile⁽¹⁵⁾, gözleendiği üzere, elektrik yüksüz zayıf akımın acaplık kuantum sayısını koruması sağlanmıştır. Tılsımlı ψ/J mezonları SLAC ve Brookhaven laboratuvarlarında gözlenmiş olup⁽¹⁶⁾, tılsımlı hadronlar ve çözülmelerini inceleyen deneyler devam etmektedir.^(17,18) Yakın zamanda, $p+Be \rightarrow \mu^+ \mu^- + X$ reaksiyonunda müonların toplam enerjisine tekabül eden kütlede, (envaryan kütle), gözlenen tepecikler ise bir beşinci

kuarkın varlığına işaret etmektedir.⁽¹⁹⁾ Kuarkların artan sayılarının yanısıra, bulunan yeni bir ± 1 elektrik yüklü lepton⁽²⁰⁾ (τ leptonu) ile temel fermiyonların sayısı, 5 lepton ve 5 renkli kuarka yükselmiştir.

Birleşik bir alan teorisi, direkt veya indirekt olarak gözlenen bu temel fermiyonları, varsa diğerlerini ve teorideki yükleri taşıyacak aracı bozonları ihtiva etmelidir. Bu aracı bozonların içinde renkli, kütlesiz glüonlar, zayıf etkileşmelerdeki yüklü ve yüksüz akımları meydana getiren $W^{\pm}$ ile Z^0 ve foton olduğu gibi, değişik çeşniler taşıyan renkli, ağır bozonlar bulunabilir. Teorinin ayar grubu olarak seçilerek G grubunun bu temel fermiyonları ve aracı bozonları içine alabilecek temsillere sahip olması gereklidir. Teorideki yükler grubun jeneratörleri olduğundan, bu yükleri taşıyan aracı bozonlar, grubun jeneratörlerinin meydana getirdiği "adjoint" temsile girerler. Temel fermiyonların ise grubun en ufak temel spinör temsillerine girmesi uygun ve ekonomik görünmektedir.

G grubu basit bir grup olduğu takdirde, teoride, kuvvetli, zayıf ve elektromanyetik etkileşmeleri birleştiren tek bir kuplaj sabiti vardır. Bu birleşmenin, kabaca $M \sim 10^{17} - 10^{19}$ GeV. mertebesindeki enerjilerde mümkün olabileceği hesaplanmıştır⁽²¹⁾. Renk ayar simetrisinden doğan etkileşmelerin kuplaj sabiti enerji azaldıkça arttığından, halen erişilebilen enerjilerde bu kuplaj sabiti, elektroman-

yetik ve zayıf etkileşmelerin kuplaj sabitinden büyük olabilir. Bundan dolayı kuantum kromodinamiği ile zayıf ve elektromanyetik etkileşmeler teorileri halen tamamen farklı görünmektedir. Zayıf etkileşmelerdeki aracı bozonların tahmin edilen kütleleri, $m \sim 70-100$ GeV, civarındaki enerjilerde, Weinberg-Salam modelinde gösterildiği gibi, zayıf ve elektromanyetik etkileşmelerin kuplaj sabitleri kabaca birbirine eşittir. Enerjinin daha düşük olduğu hallerde ise zayıf ve elektromanyetik etkileşmelerin davranışları tamamen farklı olmaktadır. Dolayısı ile, G grubuna göre ayar değişmezliğine haiz birleşik bir teorinin, yukarıda belirtilen farklılaşmaları gösterebilmesi için, G ayar simetrisinin en az iki kademede kendiliğinden bozulması gerekmektedir.

Çok yüksek enerjilerde, $E > 10^{19}$ GeV, birleşik teorinin alan denklemleri G grubu yerel ayar dönüşümleri altında değişmez kalmaktadır. Bu enerji seviyesinde, kuark ve leptonlar arasında bir farklılık yoktur ve bütün aracı bozonlar kütsüzdür. Kuark ve leptonlar birbirlerine dönüşebilecekleri için, baryon kuantum sayısı korunmamakta ve proton, lepton-kuark adı verilen bozonlar aracılığı ile lepton ve pionlara çözülebilmektedir. Proton kararlı olduğuna göre, lepton-kuarkların ve henüz evrende gözlenmemiş dönüşümlere aracılık eden bozonların, son derece büyük, bir kaç mikrogramlık, kütlelere sahip oldukları varsayılmaktadır. Bu büyük kütle, etkileşmelerin birleştikleri enerji $10^{17}-10^{19}$ GeV mertebesinde ise, protonun ömrü 10^{30} yıldan fazla olarak hesap edil-

mektedir. O halde, birleşme enerjisi mertebesinde, birleşik teorinin G-grubu ayar simetrisi, zayıf ve elektromanyetik etkileşmelerin ayar değişmezliği ile kuarkların renk ayar değişmezliği, diğer bir deyişle, çeşnileri ve renkleri belirleyen $G^C \times SU^r(3)$ alt grubu, kalacak şekilde kendiliğinden bozulmalıdır. Higgs mekanizması ile bazı aracı bozonlar süper kütleler kazanırken, bu merhalede, foton, zayıf etkileşmelerin aracı bozonları ve glüonlar kütesizdirler.

G^C , Weinberg-Salam modelinin ayar grubu $SU(2) \times U(1)$ den büyük ise, modele bağlı olarak, kendiliğinden bozulma çeşitli kademelerde olabilir. Böylece bazı zayıf bozonlar kütle kazanırken, Weinberg-Salam modelindeki zayıf bozonlar ($W^\pm, Z^0$) ve foton kütesiz kalmalıdır.

Simetrinin kendiliğinden bozulmasındaki son merhale, $SU(2) \times U(1) \times SU^r(3)$ ayar değişmezliğinin, $W^\pm$ ve Z^0 bozonlarına 50-100 GeV mertebesinde kütleler kazandırılması ile, $U(1) \times SU^r(3)$ ayar değişmezliğine indirgenmesidir. Böylece elektrodinamiğin faz değişmezliği ve kuarklar, daha doğrusu hadronlar, ile leptonların ayırımını sağlayan renk özelliği korunmuş olur.

Higgs mekanizmasının, bozonlara "süper" ağır ($M \sim 10^{17}$ GeV) ve ağır ($m \sim 10^2$ GeV) mertebelerinde kütleler kazandırılabilir şekilde uygulanabilmesi seçilen Higgs alanlarına bağlıdır. Bu alanların hangi temsile gireceği

bilinmediği gibi, bu temsilin indirgenemeyen bir temsil olması gerekmez. Ayrıca, keyfi bir $m/M \ll 1$ oranının her zaman elde edilip, edilemeyeceği, bu orana radyatif düzeltmelerin bazı sınırlar koyabileceği üzerinde çalışmalar devam etmektedir. (22)

5. AYAR GRUBU SEÇİMİ

Yukarıda anlatılan teorik çerçeveye uyan bir model kurabilmek için G grubu, üniter $U(n)$, ortogonal $O(n)$, simplektik $Sp(2n)$ ve istisnai $(G_2, F_4, E_6, E_7, E_8)$ olarak sınıflandırılmış Lie grupları arasından seçilmelidir.

Birleşik teorinin renormalize edilebilmesi için, üçgen anormalliklerinin bulunmaması gerekir. Üçgen anormalliği (triangle anomaly), üçgen fermiyon çizgileri ile ayar bozonları arasında üçlü bağlanmalara sebep olan diagramların sıfır olmamasıdır. (23) Okubo (24), $SO(4n+2)$ ($n \geq 2$), vektörsel $SU(n)$ ($n \geq 3$) ve E_6 gruplarının bu çeşit bir anormallik bulundurmadıklarını göstermiştir.

Birleşik teorinin ayar grubunun basit bir grup olması teoride tek bir kuplaj sabiti bulunacağından tercih edilmektedir. Ayrıca parite bozulmasının teorinin yapısında mevcut olmayıp, simetri bozulması ile meydana geldiği kabul edilirse, ki böyle bir teoriye vektörsel deniyor, dörtten fazla kuark çeşni ve lepton gerekmektedir. Böylece, seçilecek

basit grubun spinör temsilinin boyutu 16 ve rankı 5 den büyük olmalıdır. $SU(5)^{(25)}$, $SU(4) \times SU(4)^{(26)}$ ve $SO(10)$, $SO(14)$, $SU(16) \times SU(16)^{(27)}$ gibi basit veya iki basit grubun çarpımını kullanan modeller geliştirilmiştir. Üniter ve ortogonal grup serileri sonsuz olup, bu grupları büyütme, içlerine istenildiği kadar temel fermiyon yerleştirmek mümkün olduğundan, tek bir grubun seçimi zorlaşmaktadır.

Jordan, von Neumann ve Wigner⁽²⁸⁾ tarafından bulunan 3×3 hermitsel oktonionik matrislerle temsil edilen gözlenebilirlerin meydana getirdiği, oktonionik kuantum mekaniksel uzayların lepton ve kuark kuantum sayılarının yük uzayı olabileceği ve birleşik bir teorenin ayar grubunun, bu uzayların dönüşüm grupları olan istisnai gruplardan seçilmesi Gürsey⁽²⁹⁾ tarafından önerilmiştir. Oktonion cebirinin otomorfizm grubu olarak doğan $SU(3)$ simetrisinin renk ayar grubu olarak kabul edilmesi ile, bu simetri diğer alt grup simetrilerinden ayrılmış ve böylece lepton-kuark yapısının cebirsel bir temele oturtulması mümkün olmuştur. Oktonionların, bu cebirle ilgili istisnai uzayların, değişik geometrik hassaları sayesinde, yalnız renk teklilerinin gözlenebilir olduğu bir kuantum mekaniği geliştirilmesi ihtimali doğmuştur.

Renk özelliğini, grup yapısı tabiatına bağlı olarak bulunduran istisnai grupların, birleşik teori ayar grubu olarak düşünülmesi ile bu gruplar sadece beş tane olduklarından evrendeki temel fermiyon sayısına bir kısıtlanma getirilmiş

olmaktadır. G_2 ve F_4 ün temel spinör temsilleri varlıkları bilinen temel fermiyonları içine alacak kadar büyük olmadığından, E_8 'in ise küçük spinör temsili bulunmadığından, birleşik teorinin ayar grubu adayı olarak E_6 ve E_7 kalır.

İstisnai grupların tümü renk ve çeşnileri belirleyen $SU^F(3) \times G^C$ şeklinde alt grup yapısı gösterir (Ek 2). $SU^F(3)$ grubu oktonionik yapıya bağlı olarak bozulmadan kaldığı halde çeşni grubu böyle bir cebirsel dayanağı olmadığından kendiliğinden simetri bozulması ile bir veya birkaç merhalede elektrodinamiğin $U(1)$ simetrine indirgenebilir. Kendiliğinden simetri bozulmasının meydana geldiği doğrultuların cebirsel özellikleri incelenmektedir.⁽³⁰⁾ G^C 'nin basit veya basit $\times$ basit bir grup olması halinde zayıf elektromanyetik etkileşmelerde lepton-kuark evrenselliği elde edilmektedir.

Yukarıda belirtilen özelliklere dayanılarak, istisnai gruplardan E_6 ⁽³¹⁾ ve E_7 ⁽³²⁾ yi ayar grubu olarak seçen modeller üzerinde çalışılmaya başlanmıştır.

Bu çalışmada, istisnai gruplardan E_6 grubuna göre ayar değişmezliği gösteren bir birleşik ayar teorisi modeli kurulmaya çalışılmıştır. Modelin temel parçacık içeriği tanımlanıp E_6 grubunun üç maksimal alt grubuna göre yerleştirilmeleri gösterilmiş ve zayıf ve elektromanyetik etkileşmelerin $SU(2) \times U(1)$ ayar grubuna göre dönüşümleri belirtilmiştir. Temel fermiyon ve aracı bozonlara kütle kazandıracak

Higgs alanlarının incelenmesi için 27 ve 78 temsillerine giren skaler alanları göz önüne alınmıştır. Bu iki temsile giren Higgs alanlarının, genel bir potansiyelin en düşük enerji durumuna tekabül eden, vakum beklenen değerleri bulunup, bu çözümün, ilk mertebede, verebileceği kütle dağılımı incelenmiş ve gerçekçi bir Higgs mekanizmasının varlığı hakkında fikir edinilmiştir.

B. TEMEL FERMİYONLAR VE AYAR BOZONLARI

1. OKTONİONLAR, JORDAN MATRİSLERİ VE TEMEL FERMİON ALANLARI

Reel veya kompleks cisimler (field) üzerinde tarif edilen, x ve y elemanlarının normları $N(x)$ ve $N(y)$ için

$$N(x) N(y) = N(xy) \quad (B.1.1)$$

bağlantısının sağlandığı bölüm cebirleri $H(d)$, Hurwitz teoremine göre, boyutları $d=1,2,4,8$ olmak üzere dört tanedir. $H(1)$ reel sayı, $H(2)$ ise bir reel bir sanal birim ihtiva eden kompleks sayı cebirleridir. $H(4)$ sanal birimlerin üçe çıkarılması ile elde edilen kuaternionlardan meydana gelir. Kuaternionlar, 2×2 Pauli spin matrisleri ile gösterilebilirler. Reel ve sanal sayılar değişme (commutativity) ve birleşme (associativity) özellikleri gösterdikleri halde kuaternionlar birleşimli fakat değişimli değildir. $H(8)$ cebirinin elemanları, yedi sanal birim ihtiva eden oktonionlardır.

$$a = a_0 1 + a_n e_n, \quad n = 1, 2, \dots, 7 \quad (B.1.2)$$

şeklinde yazılan bir oktonion a_i , $i=0,1,\dots,7$, katsayıların reel veya sanal olmasına göre reel veya kompleks oktonion olarak adlandırılır. Sanal birimlerin, e_n , $n=1,2,\dots,7$, çarpım kuralı

$$e_n e_m = -\delta_{nm} + f_{nmp} e_p \quad (B.1.3)$$

olup, f_{nmp} 0 ve ± 1 değerlerini alabilen tamamen antisimetrik

bir tensördür.* Oktonionların meydana getirdiği cebir, çarpım tarifinde (B.1.3) görüldüğü üzere, değişimli ve birleşimli değildir.

Klasik Lie cebirlerini, reel, sanal ve kuarternion elemanlı, antisimetrik veya anti-Hermitsel matrislerle kurmak mümkündür. Lie cebirlerinin tanımında bulunan Jacobi özdeşliği, birleşim özelliği gösteren cebirlerde aşikar olarak sağlandığından Lie çarpımı, matris değişme parantezi ile tanımlanırsa, elemanların reel, sanal, kuaternion olmasına göre, sırası ile $SO(n)$, $SU(n)$ ve $Sp(2n)$ Lie cebirleri elde edilir. Oktonionlar ise birleşim özelliği gösteremediklerinden, bu cebirle ilgili istisnai grup ve cebirler, bu şekilde türetilemez. İstisnai Lie cebirlerinin türetilmesi ve oktonionik Jordan matrisleri ile bağları türev cebirleri ve üçüzlük (triality) prensibine dayanılarak gösterilmiştir. (33)

Jordan⁽³⁴⁾ tarafından 1933 yılında bulunan değişme özelliğine sahip, fakat birleşimli olmayan ancak cebir elemanlarının kuvvetlerine göre birleşim özelliğini koruyan cebirlere Jordan cebiri adı verilmektedir. Bu cebirler, simetrik bir iç çarpım

* Oktonion cebiri için EK 1'e bakınız.

$$J_1 \cdot J_2 = J_2 \cdot J_1 \quad , \quad (B.1-4)$$

ve

$$J_1^2 \cdot (J_1 \cdot J_2) = J_1 \cdot (J_1^2 \cdot J_2) \quad (B.1-5)$$

birleşim özelliği ile J_1 ve J_3 elemanlarına göre antisimetrik olan birleşim parantezi

$$\begin{aligned} (J_1, J_2, J_3) &= -(J_3, J_2, J_1) \\ &= (J_1 \cdot J_2) \cdot J_3 - J_1 \cdot (J_2 \cdot J_3) \end{aligned} \quad (B.1-6)$$

ile tanımlanırlar.

J_1 ve J_2 karesel hermit matrisleri için Jordan çarpımı

$$J_1 \cdot J_2 = \frac{1}{2} (J_1 J_2 + J_2 J_1) \quad (B.1-7)$$

şeklinde matris çarpımı olarak tanımlanabildiği zaman, Jordan cebirleri, değişimli olmayan, birleşimli matris cebirlerine denk olur. Klasik Lie grupları, $n \times n$ hermitsel matrislerin, Jordan çarpım tablosunu muhafaza eden, otomorfizm grupları olarak ortaya çıkar. Matris elemanlarının reel, sanal veya kuarternion olmasına göre sırası ile otomorfizm grupları olarak $SO(n)$, $SU(n)$ ve $Sp(2n)$ elde edilir. Böylece, matris cebirlerine dayanan Heisenberg-Dirac formalizmi ve Jordan cebirlerine dayanan yoğunluk matrisi formalizmi, kuantum mekaniğinde birbirine, denk olarak kullanılmaktadır.

Oktonion elemanlı hermitsel matrislerin ise yalnız 3×3

boyutlu olanları bir Jordan cebiri meydana getirmektedirler. Bu cebir birleşimli bir matris cebirine denk değildir ve istisnai gruplar ile ilgisi bu ayrıcalığa dayanır.

Oktonionik eşleniğe göre hermitsel olan Jordan matrisleri

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & c & \bar{b} \\ \bar{c} & \beta & a \\ b & \bar{a} & \gamma \end{pmatrix} = \bar{J}^T = J^\dagger \quad (\text{B.1-8})$$

olarak gösterilir. Burada, α, β, γ reel veya sanal sayılar, a, b, c ise reel veya sanal oktonionlardır.

İzi sıfır olan, $(\alpha + \beta + \gamma = 0)$, reel, dolayısı ile 26 parametrelili Jordan matrislerinin meydana getirdiği cebirin otomorfizm grubu istisnai gruplardan F_4 dür.⁽³⁵⁾ Reel ve izsiz olan Jordan matrisi J 'nin F_4 altında sonsuz küçük dönüşümü

$$\delta J = (J_1, J, J_2) = (J_1 \cdot J) \cdot J_2 - J_1 \cdot (J \cdot J_2) \quad (\text{B.1-9})$$

şeklinde Jordan birleşim parantezi ile ifade edilebilir.

Reel, izsiz Jordan matrisleri F_4 grubunun 26 boyutlu temel temsilini meydana getirirler. (B.1-9) dan görüldüğü üzere, F_4 dönüşümleri iki reel, izsiz, Jordan matrisi ihtiva ettiğinden, grubun parametre sayısı 52 dir.

Oktonionik Jordan matrisleri J_1 ve J_2 ile simetrik

Freudenthal çarpımı

$$J_1 \times J_2 = J_1 \cdot J_2 - \frac{1}{2} J_1 \text{Tr} J_2 - \frac{1}{2} J_2 \text{Tr} J_1 - \frac{1}{2} I [\text{Tr}(J_1 \cdot J_2) - (\text{Tr} J_1)(\text{Tr} J_2)] \quad (\text{B.1-10})$$

I , 3×3 boyutlu birim matris olmak üzere, tarif edilir.

Freudenthal çarpımı ile bir Jordan matrisinin determinantı

$$J \times J = J^{-1} (\text{Det } J) \quad (\text{B.1-11})$$

ve

$$(J \times J) \cdot J = I \text{Det} J ; \text{Tr}(J \times J) \cdot J = 3 \text{Det} J \quad (\text{B.1-12})$$

bağıntıları kullanılarak tarif edilebilir.

Jordan cebirleri yerine, (B.1-10) da belirtilen çarpımla tarif edilen Freudenthal cebirleri göz önüne alındığı takdirde, bu cebirin otomorfizm grubu olarak istisnai gruplardan E_6 ortaya çıkar. E_6 grubu, 3×3 boyutlu, kompleks cisim üzerinde tarif edilmiş, oktonionik hermitsel matrislerin determinantlarını muhafaza eden dönüşümlerden meydana gelir. Sanal cisim üzerinde tarif edilmiş, 27 kompleks parametrelili oktomonik hermitsel Jordan matrisinin, J , E_6 grubu altında sonsuz küçük dönüşümleri

$$\delta J = (J_1, J, J_2) + i J_3 \cdot J \quad (\text{B.1-13})$$

olarak ifade edilir. J_1 , J_2 ve J_3 reel izsiz, oktonionik hermitsel 3×3 matrisler olduklarından E_6 , $3 \times 26 = 78$ parametrelili

bir gruptur. J matrisleri bu grubun 27 boyutlu temel temsili-
lini oluřtururlar. Kompleks cisim üzerinde tarif edilen J
matrisleri, sanal eşleniğe göre hermitsel olmadıklarından
 E_6 grubunun temsilleri sanal eşleniğe göre farklıdır. J mat-
risi 27 temsiline giriyorsa, sanal eşleniği J^* , 27^* temsili-
ne girer.

Oktonion cebirinin otomorfizm grubu G_2 nin maximal
alt grubu, yine kendisi gibi rankı 2 olan $SU(3)$ tür. $SU(3)$
grubu yedi oktonionik birimden bir tanesini envaryant bıra-
kan dönüşümlerden meydana gelir. Bu doęrultu e_7 olarak seçilir-
se, $SU(3)$ alt grup yapısı, oktonion cebirinin ayrık baza g-
re çarpım tablosunda aşıkar olarak görülür. $SU(3)$ dönüşümle-
ri altında u_0 ve u_0^* değişmez kalırken, u_i , $i=1,2,3$ ls
 $SU(3)$ grubunun 3 boyutlu temel temsiline, sanal eřlenik l
 u_i^* ise 3^* temsiline girer. Oktonionik yapıdan doğan bu $SU(3)$
grubunun, kuvvetli etkileşmelerin renk grubu olduğu Gürsey⁽³⁶⁾
tarafından önerilmiştir. Böylece renk teklisi leptonlar ve
renk üçlüsü kuarklar, temel fermiyon olarak, tek bir temsilde
birleřtirilmiřtir.

$SU(3)$ grubu, oktonionlarla ilgili olan istisnai grup-
larının tümünün bir alt grubudur. Görülen diğer $SU(3)$ alt
grupları Jordan matrislerinin 3×3 boyutlu olmasından doğmakta
olup, oktonionik yapıdan gelen bu simetriden farklıdır.

$SU^r(3)$ alt grup yapısını ortaya ıkarmakzere (B.1-8)

deki Jordan matrisi

$$J = u_0 L + u_0^* L^T + u_i \hat{Q}^i + u_i^* Q^i, \quad i=1,2,3 \quad (B.1-14)$$

şeklinde yazılabilir. L , 3×3 boyutlu, sanal bir matris olup $SU^F(3)$ grubu altında envaryandır. Q_i ve $\hat{Q}^i$, 3×3 boyutlu, sanal ve antisimetrik olup $SU^F(3)$ grubunun üçlü temsillerine (3 ve 3^*) girerler. O halde leptonlar L , kuarklar ve anti-kuarklar ise Q^i ve $\hat{Q}^i$ matrisleri ile gösterilmelidir.

Lepton ve kuarklar spini $1/2$ olan nokta parçacıklar olduklarına göre homojen Lorentz grubunun (HLG) iki bileşenli spinor temsillerine göre dönüşen alanlarla (Weyl spinörleri) temsil edilirler. Parite altında birbirine dönüşen ve HLG'nun $(1/2,0)$ ve $(0,1/2)$ temsillerine giren alanlara, sırası ile, sol (left-handed) ve sağ (right-handed) spinör denilmektedir. Weyl temsilinde, spini $1/2$ ve kütleli bir fermiyon alanı, ψ , tabii olarak sağ ve sol olarak ayrılırken, Dirac temsilinde ψ 'ın dört bileşeni $(1/2,0)$ ve $(0,1/2)$ temsillerinin karışımlarıdır. Sol ve sağ spinörler, $1 \pm \gamma_5$ izdüşüm operatörleri ile elde edilirler:

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi, \quad (\text{sol spinör}) \\ \psi_R &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi. \quad (\text{sağ spinör}) \end{aligned} \quad (B.1-15)$$

Temel parçacıklar arasında nötrinolar gibi kütleli fermiyonlar bulunduğundan, bütün fermiyon alanlarını HLG'nin $(1/2,0)$ temsiline göre dönüşen iki bileşenli sol spinörlerle temsil etmek uygundur.

χ bir sol spinör ise,

$$\hat{\chi} = -i\sigma_2 \chi^* \quad , \quad \hat{\hat{\chi}} = -\chi \quad (\text{B.1-16})$$

şeklinde tarif edilen $\hat{\chi}$ bir sağ spinördür. Dört bileşenli bir Dirac spinörü ise iki tane iki boyutlu sol spinör ile temsil edilebilir. ψ bir Dirac spinör alanını temsil ediyorsa

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{B.1-17})$$

ve antiparçacığı temsil eden yük eşleniği alanı ψ^C

$$\psi^C = \gamma^2 \psi^* = \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \psi_R^* = \hat{\psi}_R \\ i\sigma_2 \psi_L^* = -\hat{\psi}_L \end{pmatrix} \quad (\text{B.1-18})$$

olarak yazılır, böylece, bir Dirac spinör alanı ψ_L ve

$\psi_L^C = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi^C = \hat{\psi}_R$ kullanarak yalnız sol spinörlerle temsil edilebilir. Diğer bir deyişle elektron alanı, elektronun ve pozitronun sol spinör kısımlarından meydana gelir.

Oktonionik bir sol spinör alanı ise

$$\psi_L = u_0 \ell_L + u_0^* \ell_L' + u_i^* q_L^i + u_i \hat{q}_R^i \quad (\text{B.1-19})$$

olarak tarif edilir. Burada, ℓ_L ve ℓ_L' , iki bileşenli sol spinörler olup renk teklileri olan leptonları temsil ederler, q_L^i ve $\hat{q}_R^i$ ise "i" renkli kuark ve antikuarkın sol spinör alanlarıdır.

2. TEMEL FERMİYONLARIN YERLEŞTİRİLMESİ

E_6 grubunun 27 boyutlu temel temsiline göre dönüşen, sanal, 3×3 boyutlu oktonionik eşleniğe göre hermitsel bir Jordan matrisinin elemanları birer sol spinör olduğu takdirde, (B.1-14) den görüleceği gibi, 9 leptonik iki boyutlu spinör ve 3 renkli kuark ve antikuarkı bu temsile yerleştirmek mümkündür. Bilinen veya gözlenmiş olan temel fermiyonları ve anti parçacıklarını bir araya getirmek için, en az iki 27 temsili gerekmektedir*. Bu temsiller, J^e ve J^μ , sırası ile elektron ve müon ailesi olarak isimlendirilmektedir. Her ailede, ikisi -1 yüklü, ikisi elektrik yüksüz, dört Dirac leptonu ve renkli üç kuark ve antikuark vardır**. Gözlenmiş olan leptonlar, elektron e^{-1} ve Perl leptonu (τ^{-}) ve elektron nötrinosu (ν^e) elektron ailesinde ve müon (μ) ve nötrinosu (ν^μ) müon ailesinde yer almaktadır. Henüz gözlenmemiş temel parçacıklardan iki elektrik yüksüz lepton, (ν^τ ve N^e) elektron ailesinde, elektrik yüklü bir lepton (M^{-}) ve iki yüksüz lepton (ν^M ve N^μ) ise müon ailesinde bulunmaktadır. 6 renkli

* E_7 grubu modelinde^(32a-b), temel fermiyonlar 56 boyutlu tek bir temsile girerler, bu temsil E_6 grubunun $56 = 1+1+27+27$ temsillerini içine alır.

**27 temsilinin elektrik yükü dağılımı Ek 3 de gösterilmiştir.

kuarktan u, d ve b (varlığına γ (upsilon) parçacığı ile işaret edilen beşinci kuark) elektron ailesinde ve c, s ile henüz gözlenmemiş altıncı kuark müon ailesinde düşünülmüştür. Elektron ve müon aileleri, tamamen bire bir karşılıklı iki 27 temsili meydana getirdiklerinden bundan sonra yalnız elektron ailesinden bahsedilecektir.*

	leptonlar	kuarklar
Elektron ailesi :	$e^{\pm}, \nu^e, \tau^{\pm}, \nu^{\tau}, N^e$	u, d, b
		(B.2-1)
Müon ailesi :	$\mu^{\pm}, \nu^{\mu}, M^{\pm}, \nu^M, N^{\mu}$	c, s, h

Temel fermiyon alanlarının (B.1-14) deki L, Q^i ve $\hat{Q}_i$ matrislerine yerleştirilebilmesi için J matrisinin E_6 grubunun alt gruplarına göre ayırımına bakılmalıdır. Göz önüne alınan üç maksimal alt grup şunlardır:

$$a) E_6 \supset SU^Z(2) \times SU(6) ; z = \text{zayıf}$$

$$b) E_6 \supset SO(10) \times SO(2)$$

$$c) E_6 \supset SU(3) \times SU(3) \times SU^r(3) ; r = \text{renk}$$

a) E_6 grubunun 27 temsili, $SU(2) \times SU(6)$ alt grubuna göre

$$27 = (2, 6) + (1, 15^*) \quad (B.2-2)$$

* İki ailenin bu şekilde bağımsız olması ile e- μ evrenselliğini ve $m_{\mu}/m_e = 200$ oranını izah edebilmek imkanı ortadan kalkmaktadır.

olarak ayrılır. $SU(2)$ zayıf etkileşmelerin ayar grubu ise, bu etkileşmelere ikili olarak giren 6 tane, tekli olarak giren 15 tane alan bulunmaktadır. Bu alanlar şöyle seçilebilir:

$$(2,6) = \begin{matrix} I_3 = \frac{1}{2} \\ \left(\begin{array}{c} \hat{e}_R \\ \nu_L^\tau \\ \nu_L^e \\ u_L^i \end{array} \right) \end{matrix}, \begin{matrix} I_3 = -\frac{1}{2} \\ \left(\begin{array}{c} \hat{N}_R^e \\ \tau_L^- \\ e_L^- \\ d_L^i \end{array} \right) \end{matrix} \quad (B.2-3)$$

Burada,

$$\tilde{u}_L^i = \begin{pmatrix} u_L^1 \\ u_L^2 \\ u_L^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}_L^i = \begin{pmatrix} d_L^1 \\ d_L^2 \\ d_L^3 \end{pmatrix}, \quad (B.2-4)$$

olup, "i" indeksi renk belirtmektedir.

$$(1,15^*) = \begin{bmatrix} 0 & N_L^e & \hat{\nu}_R^\tau & \hat{u}_R^i \\ & 0 & \hat{\tau}_R & \hat{d}_R^i \\ & & 0 & \hat{b}_R^i \\ & & & [b_L^i] \end{bmatrix} \quad (B.2-5)$$

Burada [] parantezi yerleştirmenin antisimetrik olduğunu belirtir.

$$\hat{u}_R^i = (\hat{u}_R^1, \hat{u}_R^2, \hat{u}_R^3) \quad , \quad \hat{d}_R^i = (\hat{d}_R^1, \hat{d}_R^2, \hat{d}_R^3), \dots \quad (\text{B.2-6})$$

ve

$$[b_L^i] = \begin{bmatrix} 0 & b_L^2 & b_L^3 \\ & 0 & b_L^1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2-7})$$

ise renkli kuarklar için kısaca gösteriş biçimidir.

Bu yerleştirmeye göre, Q elektrik yükü, I_3 izospin üçüncü bileşeni ise, $Q = I_3 + Y_Z/2$ olarak tarif edilen zayıf hiperyük Y_Z , SU(6) grubunun içindedir, $Y_Z = \text{diagonal } (1, -1, -1, 1/3, 1/3, 1/3)$.

SU(6) grubu, renk kuantum sayısı ve zayıf hiperyük ayrılacak şekilde daha küçük alt gruplara

$$SU(6) \supset U(1) \times SU(3) \times SU^r(3) \supset U(1) \times SU^i(2) \times U^Y(1) \times SU^r(3)$$

şeklinde indirgenebilir. Buradan elde edilen $SU^i(2)$ grubu yerine, ilk ayırimda tarif edilen SU(2) grubunu alarak yeni bir SU(6) tarif etmek mümkündür. Bu yeni SU(6) grubu hem elektrik yükü hem hiperyük operatörlerini barındıracaktır. Böylece $SU^i(2) \times SU(6)$ alt grubuna göre isimlendirme aşağıdaki şekli alır:

$$(2,6) = \begin{pmatrix} \hat{v}_R^\tau \\ v_L^e \\ e_L^- \\ \hat{d}_R^i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N_L^e \\ v_L^\tau \\ \tau_L^- \\ \hat{b}_R^i \end{pmatrix} \quad (\text{B.2-8})$$

$$(1,15^*) = \begin{bmatrix} 0 & \hat{N}_R^e & \hat{e}_R & \underline{b}_L^i \\ & 0 & \hat{\tau}_R & \underline{d}_L^i \\ & & 0 & \underline{u}_L^i \\ & & & [\hat{u}_R^i] \end{bmatrix} \quad (\text{B.2-9})$$

Zayıf hiperyük ve elektrik yükü operatörleri

$$Y_Z = \text{diagonal } (0, -1, -1, 2/3, 2/3, 2/3) \quad (\text{B.2-10})$$

$$Q = \text{diagonal } (0, 0, -1, 1/3, 1/3, 1/3)$$

olarak belirlenir.

Tanımlanan yerleşmeden, Georgi ve Glashow'un SU(5) modelinin, ⁽²⁵⁾ elektronun sağ kısmını bir zayıf ikilide bulunduran bir şeklini elde etmek mümkündür*. SU(6) alt grubu,

* Orijinal modeli elde etmek için $\hat{e}_R$ ve $\hat{\tau}_R$ 'ın yerleri değiştirilmelidir.

Q ve Y_Z operatörlerini içinde bulunduran bir $SU(5)$ grubuna ayrılır, buna göre

$$6 = 5 + 1 = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L^- \\ \hat{d}_R^i \\ \tilde{d}_R^i \end{pmatrix} + (\hat{\nu}_R^\tau) ; \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L^- \\ \hat{b}_R^i \\ \tilde{b}_R^i \end{pmatrix} + (N_L^e)$$

ve

$$15^* = 5^* + 10^* = \begin{pmatrix} \hat{N}_R^e \\ \hat{e}_R \\ \hat{b}_L^i \\ \tilde{b}_L^i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \hat{\tau}_R & \hat{d}_L^i \\ & 0 & \hat{u}_L^i \\ & & [\hat{u}_R^i] \end{bmatrix} \quad (B.2-11)$$

yerleşmesi elde edilir.

İlk göz önüne alınan zayıf $SU(2)$ ve $SU(6)$ alt grupları dış çarpımından renk $SU(3)$ grubu ayrılmak istenirse

$$E_6 \supset SU^Z(2) \times SU(6) \supset SU^Z(2) \times SU(3) \times SU^F(3)$$

alt grup dizisi elde edilir. 27 temsilinin bu alt gruplara göre ayrılması

$$27 = (2, 3, 1^F) + (1, 3, 1^F) + (2, 1, 3^F) + \\ + (1, 1, 3^F) + (1, 3^*, 3^{*F}) \quad (B.2-12)$$

şeklindedir. İlk iki terim renk teklileri olan leptonları kapsar. Zayıf etkileşmelere göre üç ikili ve bir tekli meydana getiren leptonlar

$$(2,3,1^r) = \begin{pmatrix} \hat{N}_R^e \\ \hat{e}_R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\nu}_L^\tau \\ \hat{\tau}_L^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\nu}_L^e \\ \hat{e}_L^- \end{pmatrix} \quad (\text{B.2-13})$$

ve

$$(1,3,1^r) = (N_L^e), (\hat{\nu}_R^\tau), (\hat{\tau}_R^-) \quad (\text{B.2-14})$$

olarak seçilebilir. Üçüncü ve dördüncü terimler, zayıf ikili ve teklileri meydana getiren kuarklar olup

$$(2,1,3^r) = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix}; \quad (1,1,3^r) = (b_L^i) \quad (\text{B.2-15})$$

şeklinde belirlenirken, son terim 3 antikuark teklisini temsil eder,

$$(1,3^*,3^{*r}) = (\hat{u}_R^i), (\hat{d}_R^i), (\hat{b}_R^i) \quad (\text{B.2-16})$$

Yukarıda belirtilen ayırım, zayıf etkileşmelerdeki akımlara giren ikilileri belirtir.

b) E_6 grubunun $SO(2) \times SO(10)$ maksimal alt grubu göz önüne alınırsa, 27 temsili $SO(10)$ temsillerine göre

$$27 = 1 + 16 + 10 \quad (\text{B.2-17})$$

şeklinde ayrılır. Burada, tekli temsile nötrino, 16 boyutlu temsile $(e^\pm, u^i, d^i \text{ ve } \nu^\tau)$ gibi oldukça hafif olan temel parçacık ve antiparçacıkları, 10 boyutlu temsile ise $(\tau^\pm, N^e \text{ ve } b^i)$ gibi ağır olan temel fermiyonlar yerleştirildiği

takdirde, ilk mertebedeki kütle farklarını ortaya koyabilecek bir ayırım elde edilir.

Böylece E_6 grubu, aşağıdaki zincire göre

$$E_6 \supset SO(2) \times SO(10) \supset SU(2) \times U(1) \times SU(2) \times U(1) \times SU^F(3)$$

kendiliğinden simetri bozulmasına uğrayabilirse, ortaya makul bir kütle dağılımı çıkabilir.

$SO(10)$ grubu $SU(5)$ alt grubuna göre ayrılırsa, yukarıdaki yerleştirme

$$1 = \nu_L^e ,$$

$$16 = 1 + 5 + 10^* = \hat{\nu}_R^\tau + \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ e_L^- \\ \hat{d}_R^i \\ \hat{\bar{d}}_R^i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \hat{e}_R & \underline{d}_L^i \\ & 0 & \underline{u}_L^i \\ & & [\hat{u}_R^i] \end{bmatrix}$$

$$10 = 5 + 5^* = \begin{pmatrix} N_L^e \\ \tau_L^- \\ \hat{b}_R^i \\ \hat{\bar{b}}_R^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{N}_R^e \\ \hat{\tau}_R \\ b_L^i \\ \bar{b}_L^i \end{pmatrix} , \quad (B.2-18)$$

şeklını alır. Bu temsillere, alanları

$$\hat{e}_R \rightarrow \hat{\tau}_R$$

$$\nu_L^e \rightarrow \nu_L^\tau \rightarrow N_L^e , \quad (\text{dairesel})$$

olarak değiştirecek bir dönüşüm uygulanırsa (B.2-11) de

gösterilen yerleşme elde edilir. Böylece, akımlara uyan temsiller ile kütle dağılımına uyan temsiller arasındaki bağ ortaya çıkar.

c) E_6 grubunun biri renk olmak üzere üç $SU(3)$ alt grubuna indirgenmesi 27 temsilinin Jordan matris yapısı ile ilgilidir.

$$E_6 \supset SU(3) \times SU(3) \times SU^r(3)$$

grubuna göre 27 temsili şöyle ayrılır:

$$27 = (3^*, 3, 1^r) + (3, 1, 3^r) + (1, 3^*, 3^{*r}) \quad (B.2-19)$$

Renksiz leptonlar birinci terimde, kuark ve antikuarklar sırası ile ikinci ve üçüncü terimde toplanırlar.

Göz önüne alınmış olan alt grup yapıları ile bağdaşacak biçimde temel fermiyonların isimlendirilmesi ve $SU(3) \times SU(3) \times SU^r(3)$ grubu altında dönüşüm özellikleri, elektron ve müon aileleri için aşağıda gösterilmiştir:

$$\psi^e = \begin{pmatrix} \hat{N}_R^e & \hat{e}_R & \hat{\tau}_R \\ \tau_L^- & \nu_L^\tau & N_L^e \\ e_L^- & \nu_L^e & \hat{\nu}_R^\tau \end{pmatrix} + (d_L^i, u_L^i, b_L^i) + \begin{pmatrix} \hat{u}_R^i \\ \hat{d}_R^i \\ \hat{b}_R^i \end{pmatrix} \quad (B.2-20)$$

$$27 = (3^*, 3, 1^r) + (3, 1, 3^r) + (1, 3^*, 3^{*r}) ,$$

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \hat{N}_R^\mu & \hat{\mu}_R & \hat{M}_R \\ \bar{M}_L^\mu & \nu_L^\mu & N_L^\mu \\ \mu_L^- & \nu_L^\mu & \hat{\nu}_R^\mu \end{pmatrix} + (s_L^i, c_L^i, h_L^i) + \begin{pmatrix} \hat{c}_R^i \\ \hat{s}_R^i \\ \hat{h}_R^i \end{pmatrix} \quad (\text{B.2-21})$$

(B.1-14) ifadesinde tarif edilen, L , Q_i ve $\hat{Q}^i$ matrisleri bu yerleştirmeye göre, elektron ailesi

$$L = \begin{pmatrix} \hat{N}_R^e & \hat{e}_R & \hat{\tau}_R \\ \tau_L^- & \nu_L^\tau & N_L^e \\ e_L^- & \nu_L^e & \hat{\nu}_R^\tau \end{pmatrix}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 & b_L^i & -d_L^i \\ -b_L^i & 0 & u_L^i \\ d_L^i & -u_L^i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Q}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{b}_R^i & -\hat{d}_R^i \\ -\hat{b}_R^i & 0 & \hat{u}_R^i \\ \hat{d}_R^i & -\hat{u}_R^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2-22})$$

olur. Müon ailesi için, (B.2-1) de gösterilen karşılık alanlar yerleştirilerek, ikinci 27 temsili meydana gelir.

$SU(3) \times SU(3)$ altgrubu temel parçacıkların çeşni özelliklerini ortaya koyar. Bu gruplar sağ ve sol, $SU^R(3)$ ve $SU^L(3)$ olarak isimlendirilirse Weinberg-Salam modelindeki zayıf etkileşme ayar grubu $SU^Z(2)$, $SU^L(3)$ nin izospin alt grubudur. $SU^L(3) \times SU^R(3)$ altında lepton ve kuarkların dönüşüm özellikleri, $U_L \in SU^L(3)$ ve $U_R \in SU^R(3)$ ise

$$L' = U_R L U_L^\dagger ; \quad Q^{i'} = U_L^* Q^i U_L^\dagger ; \quad \hat{Q}^{i'} = U_R \hat{Q}^i U_R^T \quad (\text{B.2-23})$$

ile gösterilir. Q^i ve $\hat{Q}^i$ nin tariflerinden kuarklar için

$$q_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \\ b_L^i \end{pmatrix} , \quad q_L^{i'} = U_L q_L^i \quad (\text{B.2-24})$$

ve anti kuarklar için

$$\hat{q}_R^i = \begin{pmatrix} \hat{u}_R^i \\ \hat{d}_R^i \\ \hat{b}_R^i \end{pmatrix} , \quad \hat{q}_R^{i'} = U_R^* \hat{q}_R^i \quad (\text{B.2-25})$$

bulunur. Böylece "a" kısmında incelenmiş olan zayıf etkileşme ikilileri, L matrisinin ilk iki sütünü ve q_L^i vektörünün ilk iki elemanından meydana gelmektedir. Bu ikililer,

$$\begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L^- \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L^- \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \hat{e}_R \\ \hat{N}_R^e \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L^- \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \nu_L^M \\ M_L^- \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \hat{\mu}_R \\ \hat{N}_R^\mu \end{pmatrix} \quad (\text{B.2-26})$$

ve Cabibbo karışımları göz önüne alınmadığı takdirde

$$\begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} c_L^i \\ s_L^i \end{pmatrix} \quad (\text{B.2-27})$$

olarak belirlenir.

Bu modelde Weinberg-Salam modelinden değişik olarak e_L ve $\hat{e}_R$ zayıf ikililerde yer almaktadırlar. Böylece elektrik yükünü değiştirmeyen zayıf akımın, elektron kısmında yalnız vektörel etkileşme bulunmaktadır. Buna bağlı olarak, atomik parite bozulması ve $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ etkileşmesinde ön-arka asimetrisi beklenmemektedir.*

Weinberg-Salam $SU(2) \times U(1)$ modelinin $SU^L(3) \times SU^R(3)$ alt grubuna yerleştirilmesi ile bu modeldeki $\sin\theta_W$ parametresi belirlenir.

$$\sin^2\theta_W = \frac{SU^Z(2) \text{ ikilileri sayısı}}{4 \times \sum_{\text{fermionlar}} (\text{elektrik yükü})^2} \quad (\text{B.2-28})$$

olarak tarif edileceğinden, bu modelde

$$\sin^2\theta_W = \frac{3}{8} \quad (\text{B.2-29})$$

olur.

3. AYAR BOZONLARI

E_6 grubuna göre ayar değişmezliğine haiz birleşik bir teoride, aracı vektör bozonlar (G_μ) teorideki yüklerin meydana getirdiği "adjoint" temsiline girerler. E_6 grubunun 78 boyutlu bu temsili $SU^L(3) \times SU^R(3) \times SU^R(3)$ grubuna göre

$$78 = (8,1,1) + (1,8,1) + (3^*,3^*,3) + (3,3,3^*) \quad (1,1,8) \quad (\text{B.3-1})$$

* Atomik parite bozulması görüldüğü takdirde $\hat{e}_R$ ile $\hat{\tau}_R$ ın yer değiştirmesi ile elde edilen bir E_6 modeli kurulabilir. (37)

olarak ayrılır.

Renk teklileri olan $SU^L(3)$ ve $SU^R(3)$ oktetlerden meydana gelen iki terim, sırası ile içlerinde zayıf etkileşmelerin aracı bozonlarını bulunduran W_μ ve W_μ^* vektör mezon oktetleridir. Renkli ve çeşnili olan leptokuarklar ise üçüncü ve dördüncü terimde, çeşni kuantum sayısı taşımayan, renk oktetli glüonlar ise son terimde yer alırlar.

Birleşik ayar teorisi varsayımlarına göre lepto kuarkların çok çok ağır, glüonların ise kütsesiz olmaları beklenmektedir.

Buna karşı W_μ ve W_μ^* oktetleri için ise teoninin kendiliğinden bozulma zincirine göre çeşitli kütle basamakları olabilir. Bu iki oktetten, kütsesiz olduğu bilinen aracı bozon fotondur. W_μ ve W_μ^* oktetleri, yukarıda belirtilen temel fermiyon yerleştirmesine ve elektrik yük akımına uygun olarak, aşağıda gösterilen şekilde tarif edilebilir:

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{3}} - \frac{2Z}{\sqrt{20}} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & W^+ & V^+ \\ W^- & -\frac{A}{\sqrt{12}} + \frac{3Z}{\sqrt{20}} - \frac{2B}{\sqrt{30}} & U^0 \\ V^- & \bar{U}^0 & -\frac{A}{\sqrt{12}} - \frac{Z}{\sqrt{20}} + \frac{4B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}_\mu \quad (B.3-2)$$

$$W_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{3}} + \frac{2Z}{\sqrt{20}} + \frac{2B}{\sqrt{30}} & W^{+}, & V^{+}, \\ W^{-}, & -\frac{A}{\sqrt{12}} - \frac{Z}{\sqrt{20}} - \frac{B}{\sqrt{30}} + \frac{C}{\sqrt{2}} & U^0, \\ V^{-}, & \bar{U}^0, & -\frac{A}{\sqrt{12}} - \frac{Z}{\sqrt{20}} - \frac{C}{\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}_{\mu}$$

(B.3-3)

Burada, A_{μ} foton alanı, Z_{μ} Weinberg-Salam modelindeki elektrik yükünü değiştirmeyen aracı bozon, $W_{\mu}^{\pm}$ ise zayıf etkileşmelerdeki elektrik yükünü ± 1 ile değiştiren aracı bozonlardır. $W_{\mu}^{\pm}$ ve Z_{μ} vektör mezonlarının kütlesi 50-100 GeV civarında, diğerlerinin ise zayıf etkileşmelerdeki verilere bakılırsa, en az olarak $W^{\pm}$ aracı bozonuna göre 10-30 misli ağır olmaları beklenmektedir. (38)

C. HIGGS ALANLARI VE MÜMKÜN KÜTLE DAĞILIMI

Birleşik teorinin, Higgs mekanizması ile kendiliğinden simetri bozulmasına uğradığı varsayıldığına göre, E_6 grubunun temsillerine göre dönüşecek, temel fermiyon ve aracı bozonlara gerçeğe uygun kütleler kazandıracak Higgs alanlarının belirtilmesi gerekir.

Teoriye ilave edilen skaler Higgs alanları H_α için kinetik enerji terimi

$$\frac{1}{2} (D_\mu H)_\alpha^\dagger (D_\mu H)_\alpha \quad (C.1)$$

olup, kovaryant türev D_μ , grup jeneratörlerinin, Higgs alanlarının girdiği temsildeki gösterinimi $(T_\alpha^{\lambda\beta})^*$, kuplaj sabiti (g) ve ayar bozonlarının dörtlü vektör alanları (G_μ^λ) ile

$$D_\mu H_\alpha = \partial_\mu H_\alpha + ig T_\alpha^{\lambda\beta} G_\mu^\lambda H_\beta \quad (C.2)$$

şeklinde gösterilir. Böylece Higgs skalerleri ile ayar bozonlarının kuplajı doğar.

Higgs alanlarının, temel fermiyonlar ile E_6 grubuna göre envaryan, Yukawa tipi kuplajları olabilir. Bu kuplaj F_A temel fermiyon alanları ise

* E_6 grubu için $T_\alpha^{\lambda\beta}$ matrisleri kaynak 32.b de gösterilmiştir.

$$F_A^t i\sigma_2 F_B \Gamma^{\alpha AB} H_\alpha \quad (C.3)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\Gamma^{\alpha AB}$ Clebsch-Gordon katsayılarından meydana gelmiş matrisleri ve fermiyon alanlarının üzerindeki "t" Lorentz grubuna göre transpozisyonu belirtir. İki 27 temsiline dış çarpımı için bilinen

$$(27 \times 27)_{\text{simetrik}} = 27^* + 351 \quad (C.4)$$

bağıntısına göre, E_6 grubu altında envaryan Yukawa terimleri meydana getirebilecek Higgs alanları 27 veya 351^* temsiline girebilirler. Gürsey tarafından gösterildiği üzere^(30,39), 27 temsiline göre dönüşen bir skaler Higgs alanı (Φ), E_6 simetrisini, kütle dağılımına uygunluğu yukarıda gösterilmiş, $SO(10) \times SO(2)$ alt grubuna indirgeyen bir kendiliğinden simetri bozulması meydana getirebilir. Böyle bir minimum enerji çözümünü sağlayan vakum beklenen değerlerin kanonik şekli

$$\Phi_0 = e^{i\delta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (\delta, \rho \text{ reel}) \quad (C.5)$$

olarak verilmiştir. Bu çözüm cümlesi için

$$\text{Det } \Phi_0 = 0 \quad \text{ve} \quad \Phi_0 \times \Phi_0 = 0 \quad (C.6)$$

olmaktadır.

Diğer taraftan, bütün Higgs alanlarının, kinetik terim vasıtası ile ayar bozonlarına kütle verebileceği ve ayar

bozonları için çok çok ağır ve ağır olmak üzere en az iki kütle seviyesi olduğu göz önüne alınırsa, 27 temsiline giren Φ alanının yanı sıra, çok çok ağır (süper) vakum beklenen değerleri olan ve fermiyonlarla Yukawa kuplajı olmayan Higgs alanlarının bulunması gerekir. Bu amaç için 78 temsiline giren süper ağır vakum beklenen değerleri olan bir Higgs alanı seçilebilir.

27 ve 78 temsiline giren Higgs alanları göz önüne alındığı takdirde doğan kütle dağılımını inceleyebilmek için ilk önce bu alanların birbiri ile etkileşmesini içeren en genel potansiyel ve çözümleri bulunmalıdır.

1. 27 ve 78 HIGGS ALANLARI İÇİN BİR VAKUM ÇÖZÜMÜ

$SU(3)$ renk simetrisi bozulmayan bir simetri olduğundan, Higgs alanlarının sadece renk kuantum sayısı taşımayan kısımlarında vakum beklenen değerlerin sıfırdan farklı olmasının yeterli olacağı varsayılabilir. Böylece, kullanılan Higgs alanlarının yalnız renksiz kısımlarını göz önüne almak yeterlidir. Bu kısımların $SU^L(3) \times SU^R(3)$ çeşni grubuna göre dönüşüm özellikleri, (B.2-19) ve (B.3-1) den

$$(27)_{\text{renksiz}} = (3^*, 3) \quad , \quad (78)_{\text{renksiz}} = (8, 1) + (1, 8)$$

(C.1-1)

olarak görülür.

Renormalize olan bir teoride potansiyel genel olarak

dördüncü mertebeden bir polinomdur. Alanların işaret değiştirmesi altında potansiyelin değişmediğini kabul edersek, sırası ile $SU^L(3) \times SU^R(3)$ grubuna göre $(8,1)$, $(1,8)$ ve $(3^*,3)$ olarak dönüşen, χ_1 , χ_2 ve φ Higgs alanları için aşağıdaki potansiyel yazılır.

$$\begin{aligned}
 V = & -\frac{\mu^2}{2} \text{Tr}(\varphi^\dagger \varphi) + \frac{f_1}{4} [\text{Tr}(\varphi^\dagger \varphi)]^2 + \frac{f_2}{4} \text{Tr}(\varphi^\dagger \varphi)^2 \\
 & + \frac{f_3}{4} \text{Tr}(\varphi^\dagger \varphi \chi_1^2) + \frac{f_4}{4} \text{Tr}(\varphi \varphi^\dagger \chi_2^2) \\
 & - \frac{m_1^2}{2} \text{Tr} \chi_1^2 + \frac{\alpha_1}{4} (\text{Tr} \chi_1^2)^2 + \frac{\beta_1}{4} \text{Tr} \chi_1^4 \\
 & - \frac{m_2^2}{2} \text{Tr} \chi_2^2 + \frac{\alpha_2}{4} (\text{Tr} \chi_2^2)^2 + \frac{\beta_2}{4} \text{Tr} \chi_2^4 \\
 & + \frac{\delta}{2} (\text{Tr} \chi_1^2) (\text{Tr} \chi_2^2)
 \end{aligned} \tag{C.1-2}$$

Alanların kanonik şekilleri

$$(\chi_1)_{ij} = a_i \delta_{ij} , \quad (\chi_2)_{ij} = b_i \delta_{ij}$$

(i üzerinde toplama yoktur)

$$\sum_i a_i = 0 , \quad \sum_i b_i = 0 \tag{C.1-3}$$

olarak belirlendiği takdirde, potansiyeli minimum kılan çözümler

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_{ij}} = 0 \tag{C.1-4}$$

denklemleri ile elde edilir. (C.5) de gösterilen kanonik şekle uyan bir çözüm, V, v ve v' alanların vakum beklenen değerleri ise

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V \end{pmatrix}, \quad \chi_0^1 = v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\chi_0^2 = v' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1-5})$$

dur. Bu çözüm için potansiyeldeki parametrelerin sağladığı kararlılık şartları

$$3m_1^2 = 9v^2(2\alpha_1 + \beta_1) + 18\delta v'^2 + f_3 v^2 \quad (\text{C.1-6})$$

$$3m_2^2 = 9v'^2(2\alpha_2 + \beta_2) + 18\delta v^2 + f_4 v^2 \quad (\text{C.1-7})$$

$$\mu^2 = (f_1 + f_2)v^2 + 2(f_3 v^2 + f_4 v'^2) \quad (\text{C.1-8})$$

ile belirlenir. Potansiyel bu çözüm için,

$$V|_0 = -\frac{1}{4}(f_1 + f_2)V^4 - (f_3 v^2 + f_4 v'^2)V^2 - \frac{9}{2}(\gamma_1 v^4 + \gamma_2 v'^4) - 18\delta v^2 v'^2 \quad (\text{C.1-9})$$

değerini alır, burada

$$\gamma_1 = 2\alpha_1 + \beta_1, \quad \gamma_2 = 2\alpha_2 + \beta_2 \quad (\text{C.1-10})$$

olarak tarif edilmiştir.

Vakum beklenen değerleri sıfır olan yeni alanlar,
 λ_i ($i=1,\dots,8$) Gell-Mann matrisleri olmak üzere

$$\varphi_{ij} = (\rho + i\xi)_{ij} + v\delta_{i3}\delta_{j3} \quad (C.1-11)$$

$$\chi^1 = \frac{1}{2} \lambda_i H_i + \sqrt{3} v \lambda_8 \quad (C.1-12)$$

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \lambda_i H_i + \sqrt{3} v' \lambda_8 \quad (C.1-13)$$

olarak tarif edilir ve potansiyel bu alanlar kullanılarak yazılırsa, (C.1.6-8) şartları dolayısı ile lineer terimler kaybolur. İkinci mertebeden terimler ise yeni tarif edilmiş Higgs alanlarının kütlelerini belirler. Potansiyelden kaybolan Higgs alanları ise kütle kazanan ayar bozonlarının üçüncü serbestlik derecesini teşkil ederler. Çözümün hakiki bir minimum enerji durumuna tekabül etmesi için, kütle kazanan ayar bozonları ile "yenmiş" olan Higgs alanlarının sayısı eşit olmalı, diğer Higgs alanlarının kütleleri ise pozitif olmalıdır. Bu şartlar, potansiyeldeki parametreler için bazı sınırlamalar koyar. Bu sınırlamaların çelişkili olmadığı gösterilmelidir.*

* Bu şartların radyatif düzeltmeler göz önüne alındığı takdirde nasıl değişeceği hakkında kaynak 22'ye bakınız.

(C.1.2) de gösterilen potansiyelden, tarif edilen yeni Higgs alanları, ρ_{ij} , ξ_{ij} , H_1 ve H_1' (C.1.11-13), için aşağıdaki kütle dağılımı ve parametre sınırları elde edilir.

a) 27 temsiline giren ϕ Higgs ailesine mensup 8 alanın ($\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}$) kütlesi

$$m_D^2 = -\frac{1}{2}(2f_2V^2 + 3f_3v^2 + 3f_4v'^2) \quad (C.1-14)$$

ve $m_D^2 > 0$ olduğundan

$$2f_2V^2 + 3f_3v^2 + 3f_4v'^2 < 0 \quad (C.1-15)$$

şartı bulunur.

b) χ^1 ve χ^2 ailelerine mensup, isospin üçlüsü alanların, (H_1, H_2, H_3) ve (H_1', H_2', H_3') , kütleleri

$$m_H^2 = -\frac{1}{6}f_3V^2, \quad m_{H'}^2 = -\frac{1}{6}f_4V^2 \quad (C.1-16)$$

ve

$$f_3 < 0 \quad \text{ve} \quad f_4 < 0 \quad (C.1-17)$$

şartı elde edilir.

c) φ ve χ^1 ailelerinin karışan mensupları için

$$\sigma_{13} = \frac{1}{(36v^2 + V^2)^{1/2}} (6v^2\rho_{13} + VH_4) \equiv \cos\theta\rho_{13} + \sin\theta H_4$$

$$\sigma_{23} = \cos\theta\rho_{23} + \sin\theta H_6$$

$$\delta_{13} = \cos\theta\xi_{13} - \sin\theta H_5$$

$$\theta_{23} = \cos\theta\xi_{23} - \sin\theta H_7 \quad (C.1-18)$$

şeklinde tarif edilen 4 alan için kütle

$$m_{\sigma}^2 = m_{\delta}^2 = -f_3 \left(\frac{36v'^2 + v^2}{24} \right) \quad (C.1-19)$$

olarak bulunur.

d) Aynı şekilde, φ ve χ^2 ailelerinin karışan mensupları için

$$\sigma'_{31} = \frac{1}{(36v'^2 + v^2)^{1/2}} (6v'\rho_{31} + vH'_4) \equiv \cos\theta'\rho_{31} + \sin\theta'H'_4$$

$$\sigma'_{32} = \cos\theta'\rho_{32} + \sin\theta'H'_6$$

$$\delta'_{31} = \cos\theta'\xi_{31} + \sin\theta'H'_5$$

$$\delta'_{32} = \cos\theta'\xi_{32} + \sin\theta'H'_7 \quad (C.1-20)$$

tarif edilen alanların kütleleri

$$m_{\sigma'}^2 = m_{\delta'}^2 = -f^4 \left(\frac{36v'^2 + v^2}{24} \right) \quad (C.1-21)$$

olur.

e) ρ_{32} , H_8 ve H'_8 Higgs alanları birbirine karışırlar ve bu alanlar için kütle matrisi şu şekli alır:

$$M = \begin{pmatrix} \rho_{32} & H_8 & H'_8 \\ 2(f_1+f_2)v^2 & \frac{2}{\sqrt{3}}f_3vv & \frac{2}{\sqrt{3}}f_4v'v \\ \frac{2}{\sqrt{3}}f_3vv & 3\gamma_1v^2 & 6\delta vv' \\ \frac{2}{\sqrt{3}}f_4v'v & 6\delta vv' & 3\gamma_2v'^2 \end{pmatrix} \quad (C.1-22)$$

$M^2 > 0$ şartı ile kütle özdeğerlerinin pozitif olması sağlanır.

Bütün şartları bir araya toplarsak

$$f_3 < 0 \quad , \quad f_4 < 0$$

$$2f_2v^2 + 3f_3v^2 + 3f_4v'^2 < 0$$

$$(f_1 + f_2) > 0 \quad , \quad \gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 > 2\delta > 0 \quad (C.1-23)$$

elde edilir ve şartlarda gelişki görülmez.

Potansiyelde ikinci mertebeden terimlerde görülmeyen 9 Higgs alanı (ξ_{33} ve $\sigma, \sigma', \delta, \delta'$ alanlarına dik kombinezonlar) ise ayar bozonlarının üçüncü serbestlik derecesini meydana getirerek 9 ayar bozonuna kütle verirler. Geriye kütlesiz Higgs mezonu kalmadığından ve Higgs mezon kütlelerinin pozitiflik şartlarını sağlayacak parametre değerleri için çözüm gerçek bir minimum enerji durumunu belirtir.

(B.3.2-3) de tarif edilen renksiz ayar bozonlarının kütleleri, (C.2) ve (C.1-5) ifadeleri kullanılarak elde edilir:

$$m^2(V_\mu^\pm) = m^2(U_\mu^0, \bar{0}) = g^2(9v^2 + \frac{v^2}{2}) ,$$

$$m^2(V_\mu^\pm)' = m^2(U_\mu^0, \bar{0})' = g^2(9v'^2 + \frac{v'^2}{2}) ,$$

$$m^2(W_{33} - W'_{33})_\mu \sim g^2 v^2 . \quad (C.1-24)$$

"v ve v'" vakum beklenen değerleri, birleştirme enerjisine tekabül eden kütleler verecek şekilde çok çok büyük, "v" ise, nötr bozonun kütlesi $g^2 v^2 = 10m_W^2$ olacak şekilde seçilebilir. Bu seçimler, (C.1.23) de gösterilmiş sınırlandırmalar ile çelişmez, ve (C.1.9) deki $V_0 | < 0$ olur.

27 ve 78 Higgs alanlarının ilavesi ile, (C.1.5) deki matris yapısından kolayca görüldüğü gibi, E_6 ayar değişmezliği, kendiliğinden simetri bozulması ile $SU(2) \times SU(2) \times U(1) \times U(1) \times SU^F(3)$ alt grubuna indirgenmiş olur. Bu merhalede 8 glüon (renk oktet), foton ve $3^L + 3^R$ zayıf etkileşme aracı bozonu kütesizdir.

2. TEMEL FERMİYON KÜTLE DAĞILIMI

Temel fermiyonlar ile E_6 grubunun 27 temsiline giren Φ Higgs ailesi Yukawa tipi terimler vasıtası ile etkileşebilir. Bu etkileşmeler, ψ^e ve ψ^μ elektron ve müon ailelerinin Jordan matrisleri ise:

$$\mathcal{L}_Y = \lambda_{\alpha\beta} T_r \{ \Phi \cdot (\psi_\alpha^\dagger (i\sigma_2) \times \psi_\beta) \} + h.e. \quad (C.2.1)$$

şeklinde (B.1-10) da tarif edilen Freudenthal çarpımı ile yazılabilir. Burada $\alpha, \beta = e, \mu$ olup

$$\lambda_{ee} = \lambda_1, \lambda_{\mu\mu} = \lambda_2 \text{ ve } \lambda_{e\mu} = \lambda_{\mu e} = \lambda_3 \quad (\text{C.2-2})$$

elektron ve müon aileleri için değişik Yukawa kuplaj sabitleridir. İfadedeki transpozisyon (t) ve $(i\sigma_2)$ ile çarpım Lorentz grubuna göre envaryansı sağlamak içindir.

(B.1.14) de tarif edilen ve (B.2.22) de içine fermiyonların yerleştirilmesi gösterilen Jordan matrislerine, $SU^L(3) \times SU^R(3)$ çeşni grubunun akımları elde edildiği için akım öz durumları denilebilir. Bu akımlar elde edilirken Cabibbo tipi, kütle ve akım öz durumlarının eşit olmamalarından doğan, karışmalar göz önüne alınmamıştır. Genel olarak kütle öz durumları ile akım öz durumlarının farklı olabileceğini kabul ederek

$$\psi_{\text{kütle}} = u_O L^i + u_O^* L^{iT} + u_i^* Q^i + u_i \hat{Q}^i \quad (\text{C.2-3})$$

şeklinde yeni bir kütle öz durumu tarif edilirse (C.1.15) de gösterilen çözüm için (C.2.1) deki Yukawa etkileşmesinden, fermiyonlar için aşağıdaki kütle terimi elde edilir:

$$\mathcal{L}_Y = \frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \{ (L^{\alpha t})_i^p i\sigma_2 (L^{\beta})_i^q (\varphi_O)_k^r \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} \}$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{\alpha\beta} \{ (q_L^{\alpha t})_i^r i\sigma_2 (\hat{q}_R^{\beta})_i (\varphi_O)_r^i + (\hat{q}_R^{\alpha t})_i i\sigma_2 (q_L^{\beta})_i^r (\varphi_O)_r^i \} + h.c$$

Burada α ve β , (C.2.2) de tarif edilmiş olup, kuarkların renk indisi ihmal edilmiştir).

Birbirlerinin yük eşleniği olan iki bileşenli sol spinörler, dört bileşenli Dirac spinörleri olarak yazılırsa, $(\varphi_0)_3^3 = V$ vakum beklenen değeri için (C.2.3) aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = V \{ & \lambda_1 (\tau_R^\dagger \tau_L + N_R^{e\dagger} N_L^e b_R^\dagger b_L) + \lambda_3 (\tau_R^\dagger M_L + M_R^\dagger \tau_L \\ & + N_R^{\mu\dagger} N_L^e + N_R^{e\dagger} N_L^\mu + b_R^\dagger h_L + h_R^\dagger b_R) \\ & + \lambda_2 (M_R^\dagger M_L + N_R^{\mu\dagger} N_L^\mu + h_R^\dagger h_L) + h.e. \} \end{aligned} \quad (C.2-4)$$

Yukawa kuplaj sabitlerinin meydana getirdiği matris

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (C.2-5)$$

köşegen hale getirilmek üzere, elektron ve müon ailelerinin açısı $\alpha = \tan^{-1}(2\lambda_3/\lambda_2 - \lambda_1)$ olan bir dönme ile yeniden tanıfi iki ailenin ayrılmasını sağlar. Böylece $e, \mu, \nu^e, \nu^\mu, \nu^\tau$; u ve d ve müon ailesinde karşılık gelen alanlar kütsesiz kalırken τ, N^e ve b ve karşılıkları şu kütleleri kazanır:

$$\begin{aligned} m_{N^e} = m_\tau = m_b &= V(\lambda - \Delta\lambda) \quad , \\ m_{N^\mu} = m_M = m_h &= V(\lambda + \Delta\lambda) \quad , \end{aligned} \quad (C.2-6)$$

burada

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad , \quad \Delta\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \left[1 + \left(\frac{2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (C.2.7)$$

olarak tarif edilmiştir.

Görüldüğü gibi, 27 temsiline göre dönüşen bir Higgs alanı, tarif edilen kütle öz durumları için ağır leptonları ayıran bir dağılım göstermektedir. Diğer lepton kütlelerini ayırmak için $(\varphi_0)_3^3$ 'den başka vakum beklenen değerlerin olması, diğer bir deyişle başka çözümler gerekir. Bu çözümler henüz bulunmamıştır, fakat sadece elde edilebilecek kütle dağılımı hakkında bir fikir edinebilmek için en genel hale bir göz atılabilir. φ_0 için, elektrik yük korunumunu sağlayan, en genel hal

$$\text{Det } \varphi_0 = 0 = \alpha_2 \alpha_3 - VV' \quad (C.2-8)$$

şartı ile beraber

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & V' & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & V \end{pmatrix} \quad (C.2.9)$$

olabilir. Bu şekle göre, iki aileyi ayıran dönüşünden sonra elde edilen kütle dağılımı şöyledir:

$$m_{\nu e} = 0 \quad ; \quad m_{\nu \mu} = 0$$

$$m_d = m_e = (m - \Delta m) (\lambda - \Delta \lambda) \equiv 0 ; m_s = m_\mu = (m + \Delta m) (\lambda + \Delta \lambda) \equiv 0$$

$$m_b = m_\tau = (m + \Delta m) (\lambda - \Delta \lambda) ; m_h = m_M = (m + \Delta m) (\lambda + \Delta \lambda)$$

$$m_{N^e} = M(\lambda - \Delta \lambda) : m_{N^\mu} = M(\lambda + \Delta \lambda)$$

(C.2-10)

burada, λ ve $\Delta \lambda$ (C.2-7) de tarif edildiği gibi olup

$$m = \frac{1}{2}(V + V') , \quad \Delta m = \frac{1}{2}(V - V') \left[1 + \frac{4\alpha_2 \alpha_3}{(V - V')^2} \right]^{1/2}$$

(C.2-11)

ve

$$M = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + V'^2 + V^2)^{1/2}$$

(C.2-12)

şeklindeki kısaltmalardır. Dağılımdan elde edilen toplam kuralı

$$\frac{m_u}{m_c} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{m_d}{m_s} = \frac{m_b}{m_h} = \frac{m_\tau}{m_M} \quad (C.2-13)$$

ilk iki oran için hakikate uygun olmasına rağmen, d ve s

kuarkları için kesinlikle doğru değildir. $(\frac{m_u}{m_c} = 0.0037$

$$\frac{m_e}{m_\mu} = 0.0048) .$$

İlave edilen vakum beklenen değerleri $SU^L(2) \times SU^R(2)$

ayar bozonlarının kütle verecektir. 78 Higgs alanının çok

büyük vakum beklenen değerlerinin yanı sıra φ_0 'ın vakum bek-

lenen değerleri küçük olduklarından ilk mertebede ihmal edi-

lebilirler. $W_\mu^\pm$ ve Z_μ^0 aracı bozonlarının kütlelerine bakı-

lırsa, $M_{\text{ağır}}^2 / M_{\text{süper ağır}}^2 = V/v$ oranına göre ilk mertebede,

Weinberg-Salam modeline uygun olarak

$$m_{W^\pm}^2 / m_{Z^0}^2 \cong \frac{5}{8} = \cos^2 \theta_W \quad (\text{C.2-14})$$

elde edilir. Foton alanı ise, φ_0 'ın yalnız elektrik yükü taşımayan elemanları vakum beklenen değer kazandıklarından, kütesiz kalır.

D. SONUÇ VE DÜŞÜNCELER

E serisi grupların kromodinamiğin ayar grubunu, $SU^r(3)$, oktonionik yapılarından ötürü diğer alt gruplardan ayrıcalıklı olarak bulundurmaları, $E \supset G^C \times SU^r(3) \supset SU^Z(2) \times U^Y(1)$ alt grup yapı zinciri, bu grupların birleşik bir teorinin ayar grubu olarak seçilmelerini sağlamıştır⁽⁴⁰⁾. E_8 grubunun adjoint temsilinden küçük temsili olmadığından, dolaylı veya doğrudan doğruya gözlenmiş temel fermiyonları içine alacak kadar büyük spinör temsillere sahip gruplar E_6 ve E_7 dir. E_7 grubuna dayanan modeller geliştirilmiş⁽³²⁾, fakat son nötrino deneylerinde gözlenen u ve d kuarklarının, zayıf elektrik yüksüz akım ile kuplajlarının E_7 modeline uymaması⁽⁴¹⁾ ve bu modelde $(\sin^2 \theta_W)_0 = 3/4$ olarak belirlenen Weinberg açısının çıplak (bare) değerinin deneylere göre daha küçük olması E_6 grubunun E_7 ye tercih edilmesine sebep olmuştur.

Çalışmada göz önüne alınan E_6 modelinde Weinberg açısının çıplak değeri, $(\sin^2 \theta_W) = 3/8$ dir. D' jakanov⁽⁴²⁾ tarafından bulunan denkleme göre, birleşme enerjisi mertebesindeki kütlelerden (Planck kütlesi $\sim \sqrt{G} \sim 10^{19}$ GeV) dolayı gelecek düzeltmeler ile

$$(\sin^2 \theta_W)_r = \frac{1}{6} + \frac{5}{9} \frac{e^2}{g^2} + \dots$$

olup, $(g_C^2)_r \sim 0.28$ değeri için, deneylere uyan,

$(\sin^2 \theta_W)_r \sim 0.22$ bağıntısı elde edilmektedir.

E_6 grubunun içine temel fermiyonların yerleştirilme şekli, $\hat{e}_R$ ve $\hat{\mu}_R$ için Weinberg-Salam modelinden farklıdır. Weinberg-Salam modelinde elektron ve müonun sağ spinör kısımları $(\hat{e}_R, \hat{\mu}_R)$ birer $SU^Z(2)$ teklisi olup atomik parite bozulmasına sebebiyet vermektedirler. Oxford ve Washington grupları tarafından yapılmış deneylere⁽⁹⁾ göre parite bozulması görülmediğinden bu modelde, (ν_L, e_L) ve $(\hat{e}_R, \hat{N}_R^e)$ şeklinde $SU(2)$ ikilileri meydana getirmiş ve elektronun sağ spinör kısmı bir $SU^Z(2)$ ikilisine konmuştur. Modelde $\hat{d}_R$ ve $\hat{s}_R$ $SU^Z(2)$ teklilerinde yer aldıklarından, acaiplik kuantum sayısını değiştiren $|\Delta S| = 1$ zayıf elektrik yüksüz akımlar bulunmamaktadır.

Modeldeki yerleştirmeye uyabilecek bir Higgs mekanizmasının varlığını incelemek için 27 ve 78 temsillerine göre dönüşen Higgs alanları göz önüne alınmıştır. Bu alanların birbiri ile etkileşmelerininide içeren bir potansiyel düşünüldü, potansiyelin hakiki bir minimumuna tekabül eden bir vakum beklenen değer çözümü örneği verilmiştir. Bu çözüme göre ρ_{33} , H_8 ve H_8^0 Higgs alanlarının kütleleri " v^2 " diğerlerinin ise " v'^2 " ve " v''^2 " ile orantılı olup, sırası ile 10^3 ve 10^{16-19} GeV mertebelerindedirler.

78 Higgs alanı, leptokuark ve gözlenmeyen renksiz aracı bozonlara çok çok ağır kütleler verebilmekte ve $SU^L(2) \times SU^R(2) \times SU^R(3)$ grubuna ait foton, 6 zayıf etkileşme bozonu ve glüonları istendiği gibi bu ilk simetri bozulması

mertebesinde kütleli bırakılmaktadır. 78 Higgs alanı fermiyonlar ile E_6 grubuna göre envaryan olan bir Yukawa tipi kuplaj meydana getiremez. Böylece bu alan, birleşik teoride protonun stabilitesini sağlayan süper ağır kütleleri elde etmek için kullanılmalıdır.

27 Higgs alanının temel fermiyonlar ile Yukawa tipi etkileşimleri vardır. Çalışmada gösterildiği gibi, bu alan, kütle öz durumları göz önüne alındığında, ağır leptonlara (N^e, N^u, τ, M) ve b ve h kuarklarına kütle kazandırmakta, $e, \mu, \nu^e, \nu^\mu, \nu^\tau, \nu^M, u, d, c$ ve s ise kütleli kalmaktadırlar. Bir çözüm olduğu gösterilmeden, 27 Higgs alanının kazanabileceği bütün vakum beklenen değerlerine bakıldığında zaman ise oldukça gerçekçi bir kütle dağılımı görülmektedir. (C.2.10) da görülen $SO(8)$, lepton ve kuark simetrisi ve (C.2.13) deki toplam kuralı çok ilginç olmakla beraber, hakiki bir vakum durumunu belirten bir çözümden elde edilmediklerinden ancak spekülatif değerleri vardır.

27 Higgs alanının kütle dağılımını incelerken lepton matrisine uygulanan dönüşümün nasıl meydana gelebileceği konusunun incelenmesi gerekir. Bu dönüşüm F. Gürsey tarafından teklif edildiği gibi⁽³⁷⁾ 351 Higgs alanının ilave edilmesi ile elde edilebilir. 351 Higgs alanı (Ek. 2) de gösterildiği gibi $SU^L(3) \times SU^R(3)$ grubuna göre $(6^*, 6)$, $(3, 3^*)$ şeklinde dönüşen renk teklisi alanlar ihtiva eder. Bunlardan $(6^*, 6)$ gibi dönüşen alanlar, yalnız leptonlar ile Yukawa tipi

etkileşmelere girebildikleri için lepton matrisi için düşünülen kütle öz durumlarını ortaya koyabilirler. Özetle kütle ve akım öz durumlarını tek bir yerleştirmeden elde edebilmek için üçüncü bir Higgs alanı gereklidir. Bu 351 olabilir.

Atomik parite bozulması deneyleri devam etmektedir ve bu çalışmanın tamamlandığı Ağustos 1978 tarihinde, Weinberg-Salam modeline uygun bir parite bozulması görüldüğü öğrenilmiştir. (43) Yeni deneylerin doğruluğu kanıtlandığı takdirde, $\bar{e}_R$ alanının bir $SU^L(2)$ teklisi olması icap eder. Bunun sağlayabilmek için (B.2.22) de tarif edilen L matrisinde $\bar{e}_R$ ve $\bar{\tau}_R$ alanlarının yerleri değiştirilebilir. Aynı değiştirme $\bar{\mu}_R$ ve $\bar{M}_R$ için yapıldığı takdirde (e, μ, ν^e, ν^μ) parçacıkları ve kuarkların $SU^Z(2) \times U(1)$ grubuna göre dönüşümleri Weinberg-Salam modeline uyar. Böyle bir yerleştirmeye göre, ilk mertebede ağır lepton ve kuarkları ayırabilecek, 27 ve 351 Higgs alanlarının vakum beklenen değerleri Gürsey tarafından bulunmuştur. Bu değerlerin, bir potansiyelin hakiki minimumuna ait olup olmadıkları bilinmemekte ve incelenmektedir.

Özetle, E_6 grubuna dayanan birleşik ayar teorisi modelinde spini 1/2 olan ve 2 tane 27 temsiline giren fermiyonlar, spini 1 olan ve 78 temsiline giren aracı bozonlar ve spini sıfır olan 27 78 ve/veya 351 temsillerine giren Higgs mezonları bulunmalıdır. İlk simetri bozulma merhalesinde, ağır lepton ve çok çok ağır aracı bozonlara kütle verebilecek Higgs mekanizması geliştirilebilir. Kütlelerdeki çok

katlılığı kaldırıp, yalnız $U(1) \times SU^F(3)$ simetrisine uygun olarak foton ve gluonları kütlesi bırakacak bir dağılım elde edebilmek için çalışmalar sürdürülecektir.

EK 1 OKTONİON (CAYLEY) CEBİRİ

Cayley cebiri, 7 sanal birimden e_a , $a=1,2,\dots,7$, meydana gelir. Bu birimler

$$e_a e_b = -\delta_{ab} + f_{abc} e_c \quad (E.1.1)$$

çarpım kuralını sağlarlar. Burada f_{abc} tamamen antisimetrik, $0, \pm 1$ değerlerini alan bir tensördür. f_{abc} nin $+1$ olduğu kombinasyonlar aşağıda gösterilen dizideki sütunlara tekabül eder:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{array} \quad (E.1.2)$$

Oktonion cebiri değişim ve birleşim özelliği göstermez. Birleşme parantezi

$$[e_a, e_b, e_c] = (e_a e_b) e_c - e_a (e_b e_c) \quad (E.1.3)$$

olarak tarif edilir ve

$$[e_a, e_b, e_c] = [e_c, e_a, e_b] = [e_b, e_c, e_a] = -[e_b, e_a, e_c] \quad (E.1.4)$$

şekilde alternatif olur.

Oktonion cebiri, reel cisim üzerinde bir bölüm cebiri meydana getirir. $(e_0=1, e_1, \dots, e_7)$ bazına göre, ω_n reel olmak üzere

$$\omega = \omega_n e_n \quad , \quad n = 0, 1, \dots, 7 \quad (\text{E.1.5})$$

ω reel bir oktoniondur. Oktonionik eşleniği ise, $\bar{e}_a = -e_a$ ile tarif edildiğinden

$$\bar{\omega} = \omega_0 e_0 - \omega_a e_a \quad , \quad a = 1, 2, \dots, 7 \quad (\text{E.1.6})$$

olur.

Kuadratik veya norm formu ise

$$N^2(\omega) = \omega \bar{\omega} = \bar{\omega} \omega = \sum_n \omega_n^2 \quad (\text{E.1.7})$$

ile tarif edilir. ω_1 ve ω_2 oktonionlarının normu için geçerli olan

$$N(\omega_1)N(\omega_2) = N(\omega_1 \omega_2) \quad (\text{E.1.8})$$

bağıntısı, cebirin, Hurwitz teoremine göre mevcut, dört kompozisyon cebirinden biri olduğunu gösterir.

Oktonion cebirine e_a sanal birimleri ile değişme özelliği olan $\sqrt{-1} = i$ sanal biriminin ilavesi ile, bölüm cebiri olmayan bir cebir türetilir. Bu cebir u_0, u_i , $i=1, 2, 3$ ve sanal eşleniklerinden meydana gelen ayırık baz (split basis) ile tanımlanır. Ayırık baz $(e_1, \dots, e_7)$ oktonion birimleri ile

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2}(1 + ie_7) \quad , \quad u_0^* = \frac{1}{2}(1 - ie_7) \\ u_i &= \frac{1}{2}(e_i + ie_{i+3}) \quad , \quad u_i^* = \frac{1}{2}(e_i - ie_{i+3}) \end{aligned} \quad (\text{E.1.9})$$

($i=1,2,3$), olarak gösterilir. Ayırık baz için çarpım tablosu, aşağıdaki ifadeler ve bunların sanal eşleniklerinden meydana gelir:

$$\begin{aligned}
 u_0 u_0 &= u_0^2 = u_0, & u_0 u_0^* &= 0 \\
 u_0 u_i &= u_i u_0^* = u_i, & u_0^* u_i &= u_i u_0 = 0 \\
 u_i u_j &= \epsilon_{ijk} u_k^*, & u_i u_j^* &= -\delta_{ij} u_0
 \end{aligned} \tag{E.1.10}$$

Reel oktonion ω , ayırık baz kullanılarak şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_0 + \omega_a e_a \\
 &= 2\text{Re} \{ (\omega_0 - i\omega_7) u_0 + (\omega_i - i\omega_{i+3}) u_i \}
 \end{aligned} \tag{E.1.11}$$

burada Re , sanal birim $\sqrt{-1} = i$ ye göre reel olan kısmı belirtir.

Oktonionların otomorfizm grubu ($e_a \rightarrow e_a'$) istisnai gruplardan, 14 parametrelili, G_2 grubudur. G_2 grubunun, oktonionik birimlerden birini (e_7 olabilir) değiştirmeyen jeneratörleri göz önüne alınırsa bu jeneratörlerin 8 tane olup bir $SU(3)$ grubu meydana getirdikleri görülür. Ayırık bazda bu $SU(3)$ grubu açıkça görülmektedir, u_0 ve u_0^* değişmez kalırken, u_i ve u_i^* , $SU(3)$ grubunun 3 ve 3^* temsilleri gibi dönüşürler.

EK 2 İSTİSNAİ GRUPLARIN BAZI TEMSİLLERİ VE $G^C \times SU^r(3)$ ALT GRUPLARI

İstisnai gruplar, rankları alt indis olarak belirtilen G_2 , F_4 , E_6 , E_7 ve E_8 den müteşekkildir. G_2 oktonionların otomorfizm grubu olup, diğer istisnai gruplar Jordan cebirini meydana getiren 3×3 oktonionik hermitsel matrisler ve bu matrislerle tarif edilen diğer cebirlerin otomorfizm gruplarıdır. Aşağıda bu grupların bazı temsilleri ve G_2 grubunun alt grubu olan, oktonionik yapı ile ilgili $SU^r(3)$ grubunu içine alan alt gruplarına göre bu temsillerin ayrılması gösterilmiştir.

İstisnai Gruplar	$G^C \times SU^r(3)$ alt grubu	Temsiller	$G^C \times SU^r(3)$ ye göre temsillerin ayrılması
G_2	$SU^r(3)$	7	$= 1 + 3 + 3^*$
		14 (Ad)	$= 8 + 3 + 3^*$
F_4	$SU(3) \times SU^r(3)$	26	$= (8, 1) + (3, 3) + (3^*, 3^*)$
		52 (Ad)	$= (8, 1) + (1, 8) + (6, 3^*) + (6^*, 3)$
E_6	$SU(3) \times SU(3) \times SU^r(3)$	27	$= (3^*, 3, 1) + (3, 1, 3) + (1, 3^*, 3^*)$
		(27*)	
		78 (Ad)	$= (1, 8, 1) + (8, 1, 8)$ $+ (3^*, 3^*, 3) + (3, 3, 3^*)$ $+ (1, 1, 8)$

Istisnai	$G^C \times SU^r(3)$	$G^C \times SU^r(3)$ ye göre
Gruplar	alt grubu	Temsiller temsillerin ayırımı
		$351 = (6^*, 6, 1) + (1, 6^*, 6^*) +$ $+ (6, 1, 6)$ $+ (3^*, 1, 3^*) + (1, 3, 3) +$ $+ (3, 3^*, 1)$ $+ (3^*, 8, 3^*) + (8, 3, 3) +$ $+ (3, 3^*, 8)$ (351^*)
E_7	$SU(6) \times SU^r(3)$	$56 = (20, 1) + (6, 3) + (6^*, 3^*)$ $133 \text{ (Ad)} = (35, 1) + (1, 8) + (15^*, 3)$ $+ (15, 3^*)$
E_8	$E_6 \times SU^r(3)$	$245 \text{ (Ad)} = (78, 1) + (1, 8) + (27, 3)$ $+ (27^*, 3^*)$

Yukarıda jeneratörlerin meydana getirdiği (adjoint) temsil (Ad) ile belirtilmiştir. E_8 grubunun bu temsilden küçük temsili yoktur.

E_6 grubu için, Freudenthal çarpımı ile elde edilen temsillerden bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$$(27 \times 27) = 27_S^* + 351_S + 351_A$$

$$(27 \times 27^*) = 1 + 78 + 650$$

$$(27 \times 78) = 27 + 351^* + 1728 \quad (E.2.1)$$

$$(78 \times 78) = 1_S + 78_A + 650_S + 2430_S + 2925_A$$

EK 3 27 TEMSİLİNİN ELEKTRİK YÜKÜ VE $SU^L(3) \times SU^R(3)$ DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ

E_6 grubunun 27 temsilini meydana getiren, sanal 3×3 boyutlu, Jordan matrisi

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & a & \bar{b} \\ \bar{a} & \beta & c \\ b & \bar{c} & \gamma \end{pmatrix} = J^T \quad (E.3.1)$$

ayrık baz kullanılarak

$$J = u_0 f + u_0^* f^T + u_i R^i + u_i^* S^i \quad (E.3.2)$$

olarak yazılır. Burada f 3×3 boyutlu bir matris, R^i ve S^i ise antisimetrik 3×3 boyutlu matrislerdir.

E_6 grubunun, $SU^L(3) \times SU^R(3)$ alt grubuna ait hermitse matrisler

$$U_L = e^{\frac{i}{2} \alpha_L \lambda_a}, \quad U_R = e^{\frac{i}{2} \alpha_R \lambda_a} \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (E.3.3)$$

ile

$$R = u_0 U_R + u_0^* U_L^* \quad \text{ve} \quad R^T = u_0^* U_R^T + u_0 U_L^\dagger \quad (E.3.4)$$

Jordan matrisleri tarif edilebilir.

J matrisinin, renkli ve renksiz kısımlarının E_6 grubunun $SU^L(3) \times SU^R(3)$ çeşni alt grubuna göre dönüşüm özelliklerini ortaya çıkarabilmek için aşağıdaki, özel (birleşimli),

E_6 grubu dönüşümü göz önüne alınır:

$$\begin{aligned} J' &= R J \bar{R}^T \\ &= (u_O U_R + u_O^* U_L^*) J (u_O^* U_R^T + u_O U_L^T) \end{aligned} \quad (E.3.5)$$

Böylece (E.1.10) çarpım tablosu kullanılarak

$$\begin{aligned} J' &= u_O (U_R g U_L^T) + u_O^* (U_L^* f^T U_R^T) \\ &\quad u_i (U_R R^i U_R^T) + u_i^* (U_L^* S^i U_L^T) \end{aligned} \quad (E.3.6)$$

elde edilir.

$SU(3)$ grubunun "3" temsiline ve 3^* temsillerine göre dönüşen vektörleri sırası ile x^a ve x_a , $a=1,2,3$ ise, $UU^\dagger = U^\dagger U$ ve $\text{Det } U = 1$, dönüşüm matrisleri ile

$$x^{a'} = (U)^a_b x^b, \quad x_{a'} = (U^*)^b_a x_b \quad (E.3.7)$$

olarak değişirler. Böylece

$$A_{ab} = \varepsilon_{abc} x^c \quad \text{ve} \quad B^{ab} = \varepsilon^{abc} x_c \quad (E.3.8)$$

şeklinde tarif edilen antisimetrik matrislerin dönüşüm özellikleri

$$A'_{ab} = (U^*)^c_a (U^*)^d_b A_{cd} \quad \text{ve} \quad B'^{ab} = (U)^a_c (U)^b_d B^{cd} \quad (E.3.9)$$

olur ve matrisler ile

$$A' = U^* A U^\dagger, \quad B' = U B U^T \quad (E.3.10)$$

gösterilir. Aynı şekilde R^i ve S^i antisimetrik matrisleri (renk indisi ihmal edilirse)

$$\hat{q}_R^i = U_R^{*i} \hat{q}_R \quad \text{ve} \quad q_L^i = U_L^i q_L \quad (\text{E.3.11})$$

şeklinde dönüşen renkli kuark üçlülerine tekabül ederler. Böylece R^i içine yerleştirilen antikuarklar $SU^R(3)$ grubuna göre 3^* temsili gibi dönüşürken, S^i içine yerleştirilen kuarklar $SU^L(3)$ grubunun 3^* temsiline dahil olurlar.

Weinberg-Salam teorisinin $SU(2) \times U(1)$ grubunun $SU(2)$ kısmı, $SU^L(3)$ içindeki isospin grubudur. Zayıf $SU(2)$ ye göre temel fermiyonların dönüşümleri

$$U_L = e^{i\lambda \cdot \vec{I}} \quad \text{ve} \quad U_R = I = \text{unit matris}$$

seçilerek, E.3.6 dan kolayca görülür.

J matris elemanlarının yük dağılımını bulmak için

$$\frac{1}{2} \alpha_L^a \lambda_L^a = \frac{1}{2} \alpha_R^a \lambda_R^a = \frac{\lambda}{2} \left(\lambda_3 + \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} \right) = \alpha Q \quad (\text{E.3.12})$$

seçilir ve

$$U_L = U_R = e^{\frac{i}{2} \alpha Q} \quad (\text{E.3.13})$$

olur. (E.3.6) ifadesi yukarıdaki özel hal ve sonsuz küçük α için

$$J' = J + i u_0 (fQ - Qf) + i u_1 (Q R^i + R^i Q) - i u_0^* (Q f^T - f^T Q) - i u_1^* (Q S^i + S^i Q) \quad (\text{E.3.14})$$

şeklini alır.

Böylece aşağıdaki yük dağılımı elde edilir:

$$\begin{aligned}
 f &\sim \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \text{leptonlar} \\
 R^i &\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \text{antikuarklar} \\
 S^i &\sim \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \text{kuarklar}
 \end{aligned}
 \tag{E.3.15}$$

Böylece f matrisi içine yerleştirilen leptonların tam sayı yükleri ve renkli R^i ve S^i matrislerine yerleştirilen anti-kuark ve kuarkların kesirli yükleri tabii olarak grup yapısından doğar.

KAYNAKLAR

- 1- C.N. Yang ve R. Mills, Phys. Rev. 96, 191 (1954).
- 2- J. Goldstone, Nuovo Cimento 19 , 154 (1961).
- 3- a) P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 12, 132 (1964);
Phys. Rev. 145 , 1156 (1966).
b) G.S. Guralnik, C.R. Hagen ve T.W.B. Kibble, Phys. Rv. Lett. 13 , 585 (1964).
c) F. Englert ve R. Brout, Phys. Rev. Lett. 13, 321 (1964).
- 4- a) G. t'Hooft, Nucl. Phys. B 33 , 173 (1971).
b) B.W. Lee, Phys. Rev. D6, 1188 (1972).
c) B.W. Lee ve J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D5 , 3132; 3137; 3155 (1972).
- 5- a) H.D. Politzer, Phys. Rv. Lett. 30, 1346 (1973).
b) D. Gross ve F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973).
- 6- a) F. Low ve M. Gell-Mann, Phys. Rev. 95, 1300 (1954).
b) C.G. Callan, Phys. Rev. D2, 1541 (1970).
c) K. Symanzik, Commun. Math. Phys. 18 , 227 (1970).
- 7- a) S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 , 1264 (1967).
b) A. Salam, Elementary Particle Physics (Nobel Symposium No. 8) , Editor N. Svartholm, sayfa 367 (Wiley 1969).

- 8- a) R.M. Barnett, SLAC-PUB-1961, Haziran (1977).
 b) C. Baltay, Avrupa Parçacık Fiziği Konferansı, Çağrılı konuşma ; Budapeşte, Temmuz (1977).
- 9- a) P.E.G. Baird, et al. Nature 264, 528 (1976).
 b) P.G.H. Sandars, Proc. XIV. Int. Conf. on Lepton and Photon Interactions at High Energies, yayınlanmak üzere, Hamburg, Ağustos (1977).
- 10- M. Gell-mann, Phsp. Lett. 8, 214 (1964).
- 11- F. Gürsey ve L.A. Radicati, Phys.Rev. Lett. 13,173 (1964).
- 12- a) O.W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. 13, 598 (1964).
 b) H. Fritsch ve M. Gell-Mann, Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, editor J.D. Fackson ve A.Roberts Cilt 2, Sayfa 135 (NAL, Batavia 1973).
- 13- L. Susskind, Proc. XIV Int. Conf. on Lepton and Photon Interactions at High Energies, yayınlanmak üzere, Hamburg, Ağustos (1977).
- 14- Diğer Alternatiflerin tartışması için bakınız ;
 J.D. Bjorken, SLAC-PUB-2062, Aralık (1977).
- 15- S.L. Glashow, J. Iliopoulos ve L. Maiani, Phys.Rev. D2, 1285 (1970).
- 16- a) J.E. Augustin, et al. Phys. Rev. Lett. 33, 1406 (1974).
 b) J.J. Aubert, et al. Phys. Rev. Lett. 33, 1404 (1974)

17- Deneysel durumun mütalaası için bakınız :

G.J. Feldman ve M.L. Perl, Phys. Rep. 33C, 285 (1977).

18- Tılsım ve kuantumkromodinamiği ilişkisi hakkında son derleme olarak bakınız;

T. Appelquist , R.M. Barnett ve K. Lane, Ann.Rev.Nuclear and Particle Science, 28, basılacak (1978).

19- a) S.W. Herb, et al. Phys. Rev. Lett. 39, 252 (1977).

b) W.R. Innes, et al. Phys. Rev. Lett. 39, 1240 (1977).

c) R.D. Kephart, et al. Phys. Rev. Lett. 39, 1440 (1977).

20- M.L. Perl, et al. Phys. Rev. Lett. 35, 1489 (1975) ;

Phys. Rev. Lett 70B, 487 (1977).

21- H. Georgi, H. Quinn ve S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33, 451 (1974).

22- a) E. Gildener, Phys. Rev. D14, 1667 (1976).

b) I. Bars ve M. Serdaroğlu, Yale Report, COD-3075-198 (1978).

23- C. Bouchiat, J. Iliopoulos ve Ph. Meyer Phys. Lett. 35B, 519 (1972).

24- S. Okubo, Phys. Rev. D16, 3528 (1977).

25- H. Georgi ve S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32, 433 (1974).

26- J. Pati ve A. Salam, Phys. Rev. D8, 1240 (1973).

27- H. Fritzsch ve P. Minkowski, Ann. of Phys. 93, 193 (1975).

- 28- P. Jordan, J. Von Neumann ve E.P. Wigner Ann. Math. 35, 29 (1934).
- 29- İstisnai gruplar, Yük uzayları ve gözlenebilirler hakkında ; F. Gürsey'in aŗağıdaki kitaplarda bulunan makalelerine bakınız;
- a) Int. Symp. on Mathamatical Problems in Theoretical Physics, Editr H. Araki, Sayfa 189 (Springer 1975).
- b) Group Theoretical Methods in Physics, editr A Janner, T. Janssen ve M. Boon, Sayfa 225 (Springer 1976).
- c) New Pathways in High Energy Physics, editr A. Perlmatter, Sayfa 231 (Plenum Press 1976).
- 30- F. Gürsey, Proc. of Montreal Conf. on group Theoretical Methods in Physics, Sayfa 213 (Academic Press 1977).
- 31- a) F. Gürsey, P. Ramond ve P. Sikivie Phys, Lett. 60B , 177 (1976).
- b) F. Gürsey, M. Serdaroğılu, Lett. al Nuovo Cimento 21, 28 (1978).
- 32- a) F. Gürsey ve P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. 36, 775 (1976).
- b) F. Gürsey ve P. Sikivie, Phys. Rev. D16, 816 (1977).
- c) P. Ramond, Nacl. Phys. B110, 214 (1976).
- 33- Oktonionlarla Lie cebirleri tretilmesi ve İstisnai grupların elde edilmesi ve genel özellikleri iğıin bakınız.

- a) N. Jacobson, Exceptional Lie Algebras, (Marcel Dekker, N.Y., 1971).
 - b) R.D. Schafer, An Introduction to Non-associative Algebras, (Academic Press, 1950).
 - c) F. Gürsey, "Non-associative Algebras in Quantum Mechanics and Particle Physics , çağrılı konuşma; Univ. of Virginia Charlottesville (Mart 1977).
 - d) P. Ramond, CALT-68-577, Aralık (1976).
- 34- P. Jordan, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 209 (1933).
- 35- C. Chevalley ve R.D. Schafer, Proc. Natl. Acad. Sci.U.S. 36, 137 (1950).
- 36- a) M. Günaydın ve F. Gürsey, Nuovo Cimento Lett. 6, 401 (1973) ; J. Math. Phys. 14, 1651 (1973).
- b) F. Gürsey, Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory, editör G. Domokos, Sayfa 15 (John Hopkins Univ 1974).
- 37- F. Gürsey, Çağrılı konuşma ; John Hopkins Üniversitesi, Mayıs (1978),
- 38- K. Lane, Seminer notları, Yale Üniversitesi, Kasım 1977).
- 39- F. Gürsey, "Exceptional Groups, Finite Transformations and Canonical Forms" adlı makale, (henüz yayınlanmamıştır).

- 40- M. Gell Mann, P. Ramond ve R. Slansky, "Color Embeddings, charge assignments and proton stability in unified gauge theories" adlı makale, (Rev. of Mod. Phys'de basılacak).
- 41- L. E. Abbott ve R.M. Barnett, Phys. Rev. Letters 40 ; 1303 (1978).
- 42- D.I. D'jakanov, Leningrad Nükleer Fizik Enstitüsü, Rapor No. : 303, (1977).
- 43- F. Gürsey; Özel yazışma (Ağustos 1978).
- 44- J. Patera ve D. Sankoff, Tables of Branching Rules and Representation of Simple Lie Algebras Montreal Üniversitesi (1974).