# BANACH UZAYLARINDA İZDÜŞÜM KAVRAMININ BİR GENELLEŞTİRİLMESİ; LİNEER OLMAYAN DENKLEM VE VARYASYONEL EŞİTSİZLİKLER İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

(Doçentlik Tezi)

Dr.Ali Ülger

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET


Burada sunduğumuz çalışma üç bölümden ve her bölüm de iki kısımdan oluşmuştur:

KISIM I.1'de Banach uzaylarının geometrisi ile ilgili temel kavram ve özellikler toplanmıştır.

KISIM I.2'de lineer olmayan operatörler ile ilgili bazı tanım ve sonuçlar yeralmaktadır.

KISIM II.1'de düalite operatörleri genelleştirilmiş ve bu operatörlerin özellikleri incelenmiştir.

KISIM II.2'de, refleksif Banach uzaylarında, "T-izdüşüm" adı altında bir izdüşüm kavramı tanımlanmış ve, herhangi bir İD-operatörü T için, T-izdüşüm operatörünün özellikleri incelenmiştir.

KISIM III.1'de, refleksif Banach uzaylarında, $\tilde{M}$-tipi operatörlere bağlı olarak verilmiş varyasyonel eşitsizliklerin çözümünün varlığı gösterilmiştir.

KISIM III.2'de, bir Banach uzayı E nin bir (konveks olmayan) alt kümesi $\bar{D}$ üzerinde tanımlı bir A operatörü için, $A(u) = 0$ $(A : \bar{D} \to E')$, $A(u) = J_\phi(u)$ ($J_\phi$ bir düalite operatörüdür) ve $A(u) = u$ $(A : \bar{D} \to E,\ u \in D)$ eşitliklerinin çözümünün varlığı üzerine bir dizi önerme ve teorem verilmiştir.

# S U N U Ş

Bu çalışma üç bölümden oluşmuştur:

BÖLÜM I: ÖN BİLGİLER,

BÖLÜM II: İZDÜŞÜM KAVRAMININ, LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLER YARDIMI İLE, BİR GENELLEŞTİRİLMESİ,

BÖLÜM III: LİNEER OLMAYAN EŞİTLİK VE EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR.

BÖLÜM I'de çalışmamız için gerekli kavram ve bilgiler toplanmıştır. Bu bölüm iki kısıma ayrılmıştır:

KISIM I.1'de Banach uzaylarının geometrisi ile ilgili temel bilgiler yer almaktadır ki bunlar: a) Kesin-konveks (Strictly Convex) Banach uzayları, b) Pürüzsüz (Smooth) Banach uzayları, c) Düzgün pürüzsüz (uniformly smooth) Banach uzayları, d) Düzgün-konveks (uniformly Convex) Banach uzayları, e) Yerel düzgün-konveks (locally uniformly convex) Banach uzayları ile ilgili tanım ve sonuçlardır.

KISIM I.2'de lineer olmayan operatörler ile ilgili bilgiler yeralmaktadır ki bunlar: a) Monoton operatörler, b) h-sürekli (hemicontinuous) operatörler, c) p-monoton (pseudo-monotone) operatörler, d) Düalite operatörleri, e) Gâteaux türevi ve alt-gradyan kavramı ile ilgili tanım ve sonuçlardır.

Bu bölümde bir kaç basit önermenin ispatından başka ispat verilememiş, ancak, her önerme için gerekli kaynak gösterilmiştir.

Çalışmanın esas kısmını BÖLÜM II ve BÖLÜM III oluşturmaktadır.

BÖLÜM II'de yapılanları açıklık ile anlatabilmemiz için aşağıdaki tanımı burada hatırlatmak gereklidir kanısındayız. Bu tanımda $(E, \|\ \|)$ bir refleksif gerçel Banach uzayı, $(E', \|\ \|')$ onun düali ve $T : E \to E'$ bir operatördür. E' ile E arasındaki doğal düaliteyi $\langle .,. \rangle_{E',E}$ ile göstereceğiz.

TANIM A- i) Her $u,v \in E$ için, $u \neq v$ olmak üzere,

$$\langle T(u) - T(v), u-v \rangle_{E',E} > 0$$

ise, T ye "kesin-monoton"dur, denir.

ii) Her $u,v \in E$ ve $0 \leq t \leq 1$ için,

$$\lim_{t \to 0+} \langle T(u+t(v-u)), v-u \rangle_{E',E} = \langle T(u), v-u \rangle_{E',E}$$

ise, T ye "h-sürekli"dir, denir.

iii) $u \in E$ sabitlendiği zaman, $\|v\|$ nin u ya bağlı, $\|u\|$ sınırlı kaldığı zaman sınırlı kalan, bir $\alpha(\|u\|)$ sayısından büyük değerler için,

$$\langle T(v-u), v \rangle_{E',E} > 0$$

ise, T ye "koersif", denir.//

Şimdi, $T : E \to E'$ kesin-monoton, h-sürekli, koersif ve $T(o) = 0$ olan bir operatör ve K da E nin bir boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Bölüm II'de yanıtlamaya çalıştığımız SORULAR şunlardır.

$S_1$) Her $u \in E$ için, aşağıdaki (I) varyasyonel eşitsizliğini sağlayan bir $k_u \in K$ varmıdır?

$$(I): \forall v \in K, \quad \langle T(k_u - u), k_u - v \rangle_{E',E} \leq 0.$$

Çok iyi bilindiği gibi, eğer $(H, \langle \rangle)$ bir gerçel Hilbert uzayı ve K da H nin bir boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi ise, $u \in H$ nın K üzerine metrik izdüşümü $p_K u$,

$$(I') : \forall v \quad K, \quad \langle P_K u - u, p_K u - v \rangle \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliğini sağlayan K nın tek elemanıdır. Başka bir deyim ile $p_K u$ (I') varyasyonel eşitsizliği ile de tanımlanabilir.

Yukarıdaki sorunun altında yatan düşünce budur.]

$S_2$) Eğer, her $u \in E$ için, (I) varyasyonel eşitsizliğini sağlayan bir $k_u \in K$ var ise, bu $k_u$ tek midir? $u \in K$ için, $k_u = u$ mıdır?

$S_3$) Eğer, her $u \in E$ için, (I) varyasyonel eşitsizliğini sağlayan bir $k_u \in K$ var ise, $u \in E \to k_u \in K$ operatörünün ne gibi özellikleri vardır? [Bilindiği gibi, Hilbert uzaylarında ve, daha genel olarak, yerel düzgün-konveks Banach uzaylarında, $u \to p_K u$ operatörü süreklidir.] [Bölüm II.2'ye bakınız.]

$S_4$) Eğer, her $u \in E$ için, (I) varyasyonel eşitsizliğini sağlayan bir $k_u \in K$ var ise, $u \in F \to T\,(k_u - u) \in E'$ operatörünün ne gibi özellikleri vardır? [Bilindiği gibi, Hilbert uzaylarında, $u \in H \to p_K u - u \quad H$ operatörü monoton ve süreklidir].

Bu soruların anlamlı olması, her şeyden önce, E den E' ne giden, kesin-monoton, h-sürekli ve koersif olan operatörlerin varlığına bağlıdır. İşte, Bölüm II'nin birinci kısmı, Kısım II.1, bu işe ayrılmıştır.

KISIM II.1'de, kendisi ve düali kesin-konveks olan bir Banach uzayı-bu uzayın refleksif olması gerekmiyor- verildiğinde, bu uzayın ikinci düali $(E'', \|\,\|'')$ nün, norm-topoloji için yoğun olan ve E yi içeren, bir $\Lambda$ alt kümesi üzerinde tanımlı, $\Lambda$ dan E' ne giden "kanonik" operatörlerin varlığı gösterilmiştir. Bu operatörler, uzay refleksif olduğu zaman klasik düalite operatörlerine ([Browder, 1,2,3], [Lions, 1], [Vainberg, 2]) dönüşmektedirler. Bu nedenle bu operatörlere "genelleştirilmiş düalite operatörleri" adı verilmiştir. Bu operatörlerin kesin-monoton, h-sürekli ve koersif oldukları ispatlanmış ve diğer bir çok özellikleri incelenmiştir.

KISIM II.2'de Tanım-A daki i), ii) ve iii) özelliklerine sahip herhangibir $T : E \to E'$ operatörüne "izdüşüren operatör" kısa olarak, "İD-operatörü" adı verilmiş ve yukarıda sıralanan $S_1$), $S_2$), $S_3$) ve $S_4$) sorularına YANIT olarak şunlar gösterilmiştir:

$y_{1,2}$) Herhangibir İD-operatörü $T : E \to E'$ verildiğinde, her $u \in E$ için, bir ve bir tek, $k_u \in K$ (I) varyasyonel eşitsizliğini sağlamaktadır. Ayrıca, $u \in K$ için, ve yalnız bu u lar için, $k_u = u$ dır.

(I) varyasyonel eşitsizliği ile tanımlanan bu $k_u \in K$ elemanına "u nın K üzerine T-izdüşümü" adı verilmiştir.

$y_3$) $u \in E \to k_u \in K$ operatörünün yarı-sürekli (norm-zayıf sürekli) bir operatör olduğu ispatlanmış ve, K kümesi yerel-tıkız olduğu zaman, aynı operatörün sürekli olduğu gösterilmiştir.

$y_4$) $u \in E \to -T(k_u - u) \in E'$ operatörünün monoton, yarı-sürekli (norm-zayıf yıldız sürekli) ve sınırlı olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca, T operatörü olarak bir düalite operatörü aldığımızda $k_u$ nün $p_K u$ ya eşit olduğu gözlenmiştir.

Bu konuda vurgulanması gereken bir nokta da şudur: T-izdüşüm kavramı metrik izdüşüm kavramından daha genel bir kavramdır. T-izdüşüm, $u \to k_u \in K$ operatörünü tanımlayabilmemiz için üzerinde çalıştığımız uzayın bir normlu uzay olması şart değildir; herhangi bir yerel konveks Hausdorff topolojik vectör uzayında da T-izdüşüm kavramını tanımlar, T-izdüşüm operatörü, $u \to k_u \in K$ nın özellikleri inceleyebiliriz. Ama, gerçeklerden uzaklaşmamak ve tamamıyla varsayımlara dayanan bir çerçevede çalışmak durumunda kalmamak için, Banach uzaylarında çalışmak yeğlenmiştir.

BÖLÜM III'de iki kısıma ayrılmıştır.

KISIM III.1 "$\tilde{M}$-t-pi operatörler ile verilmiş varyasyonel eşitsizliklerin çözümünün varlığı üzerine" başlığını taşımaktadır. Bu kısım Bölüm II'nin bir uygulaması niteliğindedir. Burada gayemiz, $A : E \to E'$ bir $\tilde{M}$-tipi, ön-koersif operatör, $K \subseteq E$ konveks ve kapalı bir küme ve $f \in E'$ verildiğinde,

$$\text{(II)} \quad \forall v \in K, \ \langle A(u)-f, u-v\rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliğini sağlayan bir $u \in K$ nın varlığını göstermektir. [Brezis, I] de bu tip operatörler, tanımlanmış ve incelenmiştir. Ayrıca, aynı yapıtta, Brezis $A(u) = f$ denkleminin çözümünün varlığını göstermiştir. Ancak, (II) tipi bir varyasyonel eşitsizliğin, A bir $\tilde{M}$-tipi operatör olduğu zaman, çözümünün varlığı, bildiğimiz kadarı ile, henüz gösterilmiş değildir. Burada yapılanlar, bir ölçüde, bu boşluğu doldurmaya yöneliktir.

KISIM III.2 "A(u) = f denkleminin çözümünün varlığı üzerine bazı sonuçlar" başlığını taşımaktadır. Bu kısımda bir Banach uzayı $(E,\|\ \|)$ nin bir alt kümesi $\bar{D}$ üzerinde tanımlı, $\bar{D}$ den E ye, veya E' ne, giden bir A operatörü için, $A(u) = 0$ $(0 \in E')$, $A(u) = J_\phi(u)$ ($J_\phi$ bir düalite operatörüdür) ve $A(u) = u$ $(u \in D)$ eşitliklerini sağlayan bir $u \in D$ elemanının varlığı ile ilgili bir dizi önerme ve teorem ispatlanmıştır. Bu önerme ve teoremlerden bir kısmı bilinen bazı sonuçları genelleştirmekte, diğer bir kısmı ise, kanımızca, bazı yenilikler içermektedir. [Örneğin, Teorem III.2.1, III.2.2, III.2.3, III.2.4]. Burada ispatlanan önerme ve teoremlerde vurgulanması gereken bir nokta da "konveks"liğin kullanılmamasıdır. Örneğin A(u) = u sabit nokta teoremi konveks olmayan bir D kümesi için ispatlanmıştır. Bu kısımda verilen teoremler tipinden teoremlerin ispatı, genellikle, [Browder, 4.5] de verilen "sabit nokta" teoremleri tipinden sonuçlar kullanmaktadır. Sabit nokta teoremlerinde de konveksliğin önemli rol oynayışı, sonuç olarak, bu teoremlerden yararlanarak ispatlanan teoremlere de yansımaktadır. Biz burada [Browder, 4,5] tipi sabit nokta teoremleri yerine "topolojik derece" teorisinden [Leray-Schauder] yararlandık. [Bu teoride üzerinde çalıştığımız D kümesinin konveks olması gerekmemektedir]. Ayrıca, büzülebilir (Shrinkable) kümelerin önemli özellikleri incelenmiş ve şimdiye kadar konveks kümeler için verilen bazı sonuçların [Önerme III.2.4 ve Teorem III.2.4 gibi] büzülebilir kümeler için de geçerli olduğu gösterilmiştir.//

Burada sunduğumuz çalışmada yeni olan veya yenilik içeren kısımlar, kanımızca, şunlardır:

1) KISIM II.1'de, Bishop-Phelps teoremi yardımı ile genelleştirilmiş düalite operatörlerinin tanımı ve bu operatörlerin özelliklerinin incelenmesidir.

2) KISIM II.2'de, T-izdüşüm kavramı; ve herhangibir İD-operatörü T den itibaren, T-izdüşüm operatörünün özelliklerinin incelenmesidir.

3) KISIM III.1'de, $\tilde{M}$-tipi operatörlere bağlı olarak verilmiş varyasyonel eşitsizliklerin çözümünün varlığının gösterilmesidir.

4) KISIM III.2'de, Verilen Teorem ve Önermelerden Önerme III.2.2 ve Önerme III.2.7 hariç diğer sonuçlardır.

# BÖLÜM I: ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavram ve bilgiler toplanmıştır. Burada ifadeleri verilen öneme ve teoremlerden sadece birkaçının ispatı aktarılmış, diğerleri için ispatın bulunabileceği kaynak göstermek ile yetinilmiştir. Köşeli parantez içindeki isim ve sayılar bibliografyadaki yazar ve onun yapıtını bildirmektedir.

Bölüm I, iki kısıma ayrılmıştır. Kısım I.1'de Banach uzaylarının geometrisinin temel kavramları ile ilgili; Kısım I.2'de ise lineer olmayan operatörler ile ilgili, bilgiler yeralmaktadır.

## KISIM I.1- BANACH UZAYLARININ GEOMETRİSİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Bu tezde kullanacağımız bütün vectör uzayları $\mathbb{R}$ üzerinde, (gerçel) uzaylardır.

<u>NOTASYON</u>: Herhangibir Banach uzayı $(E,\|\ \|)$ için, $(E',\|\ \|')$ ve $(E'',\|\ \|'')$ ile onun birinci ve ikinci topolojik düallerini göstereceğiz. E ve E" nün elemanlarını u,v... gibi; E' nün elemanlarını ise f,g... gibi, harfler ile göstereceğiz. Ayrıca, B(E) ile E nin kapalı birim yuvarını ve S(E) ile de E nin birim kümesini göstereceğiz. Aynı şekilde, E' ve E" birim yuvar ve küreleri B(E'), B(E"), S(E') ve S(E") ile gösterilecektir.

### I.1.1- KESİN-KONVEKS (Strictly-Convex) BANACH UZAYLARI

Banach uzayları normlarının -ve dolayısıyla birim kürelerinin- sahip oldukları özelliklere göre çeşitli sınıflara ayrılmaktadırlar. Bunlardan 'kesin konveks' sınıfını oluşturanlar, aşağıdaki tanımında da ifade edildiği gibi, birim küresi "yuvarlak" olanlardır.

TANIM I.1.1- $(E, \| \ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer, S(E) nin iki ayrı noktasını birleştiren doğru parçası, S(E) yi bir üçüncü noktada kesmiyor ise, $(E, \| \ \|)$ ye bir "kesin-konveks Banach uzayı" dır, denir.

Analitik olarak, bu tanım aşağıdaki ifadeye eşdeğerdir:

$$u, v \in S(E),\ u \neq v,\ 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda u + (1-\lambda) v \notin S(E).$$

ÖRNEKLER: 1) $(S, A, \mu)$ herhangibir ölçüm uzayı olsun. Lebesque uzayları $E = L^p_\mu(S)$, $1 < p < \infty$, $\|u\|_p = \left[\int_S |u|^p d\mu\right]^{1/p}$, Minkowski eşitsizliğinin bir sonucu olarak, kesin-konveks Banach uzaylarıdır.

2) Eğer, M bir kesin konveks Young Fonksiyonu ve $\Omega$ da $\mathbb{R}^n$ nin bir ölçülebilir alt kümesi ise, Orlicz uzayları $E_M(\Omega)$ ve $L_M(\Omega)$, Orlicz ve Luxemburg normları için, kesin konveks Banach uzaylarıdır[Sundereson, s: 1353-56] Orlicz uzaylarının tanımı için [Krasnoselskii-Rutinckii] ye bakınız.

Refleksif Banach uzaylarının kesin-konveksliği ile ilgili, Aspulund'un [Aspulund, I] klasik "renorming" teoreminden biraz daha kuvvetli olan aşağıdaki teorem vardır.

TEOREM I.1.1- [Brezis-Crandall-Pazy, I]: $(E, \| \ \|)$ bir refleksif Banach uzayı ve $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ bir sayı, olsunlar. Bu durumda, E nin üzerine öyle bir $\| \ \|_a$ norm koyabilirizki, bu norm için aşağıdaki özdeşlik bağıntıları

$$\frac{1}{a} \| \ \|_a \leq \| \ \| \leq a \| \ \|_a$$

ve

$$\frac{1}{a} \| \ \|'_a \leq \| \ \|' \leq a \| \ \|'_a$$

sağlanır ve, $(E, \| \ \|_a)$ ve $(E', \| \ \|'_a)$ uzayları da aynı zamanda kesin konveks olurlar. ||

Bu teoreme göre bir refleksif Banach uzayının normu özdeş bir norm ile değiştirilerek, uzayın kendisi ve düali kesin-konveks yapılabilir. İleride, gerektiğinde, refleksif Banach uzayları ve onların düallerini kesin-konveks olarak alacağız.

Kesin-konveks Banach uzayları ile ilgili, ileride kullanacağımız, iki önerme de şunlardır.

ÖNERME I.1.1- $(E,\|\ \|)$ düali kesin-konveks olan bir Banach uzayı ve $u \in E\setminus\{o\}$ olsun. Bu durumda, $f(u) = \|u\|$ eşitliğini sağlayan bir, ve bir tek, $f \in S(E')$ vardır.

İSPAT: Böylesi bir f, Hanh-Banach teoremine göre, vardır. Eğer, f den farklı bir $g \in S(E')$ için, $g(u) = \|u\|$ olmuş olsa idi, $\frac{f+g}{2} \in S(E')$ olurdu. Zira, $\|\frac{f+g}{2}\|' \leqslant 1$ ve $\frac{f+g}{2}(u) = \|u\|$ olduğundan, $\|\frac{f+g}{2}\|' = 1$ dir. $(E',\|\ \|')$, varsayım gereği, kesin-konveks olduğu için, $\frac{f+g}{2}$ nin $S(E')$ de olması imkansızdır. O halde, $f(u) = \|u\|$ eşitliğini sağlayan $f \in S(E')$ tektir.||

ÖNERME I.1.2- $(E,\|\ \|)$ bir kesin-konveks Banach uzayı ve $u \in S(E)$ bir eleman olsun. Bu durumda, $f(u) = 1$ ve, her $v \in S(E)$, $v \neq u$ için, $f(v) < 1$ olacak şekilde bir $f \in S(E')$ vardır.

İSPAT: Hahn-Banach teoremine göre, $f(u) = 1$ eşitliğini sağlayan bir $f \in S(E')$ vardır. Eğer u dan farklı bir $v \in S(E)$ için, $f(v) = 1$ olmuş olsa idi, $f(\frac{u+v}{2}) = 1$ ve $\|\frac{u+v}{2}\| \leq 1$ olurdu. Bu son iki bağıntı ise $\frac{u+v}{2}$ nin $S(E)$ de olmasını gerektirir; zira, eğer herhangi bir $u_o \in B(E)$ için $f(u_o) = \|f\|$ ise, $u_o$ zorunlu olarak $S(E)$ dedir. $\frac{u+v}{2}$ nin $S(E)$ de olması, $(E,\|\ \|)$ kesin-konveks olduğu için, imkansızdır; o halde, $f(v) < 1$ dir.||

Kesin-konveks Banach uzaylarının kalıtımsal özellikleri de şöyledir:

TEOREM I.1.2- 1) Bir kesin-konveks Banach uzayının, her kapalı alt-uzayı da bir kesin-konveks Banach uzayıdır.

2) Bir kesin-konveks Banach uzayının her bölüm uzayı da bir kesin konveks Banach uzayıdır.

3) Eğer, $(E_1,\|\ \|_1)$ ,..., $(E_n,\|\ \|_n)$ kesin-konveks Banach uzayları

$$E = \prod_{k=1}^{n} E_k \text{ ve } \|u\|_p = \left[\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|_k^p\right]^{1/p}, \quad 1<p<+\infty,$$

ise $(E,\| \|_p)$ de bir kesin-konveks Banach uzayıdır. [Köthe,I, s:342-366].

## I.1.2- PÜRÜZSÜZ (Smooth) BANACH UZAYLARI

Pürüzsüz Banach uzayları, Banach uzayları içinde, birim küresi "köşesiz" olan Banach uzaylarından oluşan sınıftır. Bu tip Banach uzaylarında, birim kürenin her noktasından bir ve bir tek, tanjant planı geçmektedir.

<u>TANIM I.1.2-</u> $(E,\| \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer, her $u \in S(E)$ için, $f(u) = 1$ eşitliğini gerçekleyen bir, ve bir tek, $f \in S(E')$ var ise, $(E,\| \|)$ ye bir "pürüzsüz Banach uzayı"dır, denir.

<u>ÖRNEK:</u> Herhangibir ölçüm uzayı $(S,A,\mu)$ için, $(L^p_\mu(S),\| \|_p)$, $1 < p < +\infty$, bir pürüzsüz Banach uzayıdır [Köthe,I, s:351].

Bir Banach uzayının pürüzsüz oluşu uzayın normunun Gâteaux-türevlenebilir oluşuna bağlıdır.

<u>TANIM I.1.3-</u> $(E,\| \|)$ bir Banach uzayı ve $u_o \in (SE)$ bir eleman olsun. Eğer, her $v \in S(E)$ için $\lim\limits_{\substack{\lambda\to o\\ \lambda\neq o}} \dfrac{\|u_o + \lambda v\| - \|u_o\|}{\lambda}$ var ise,

E nin normu "$u_o$ da Gâteaux-türevleri"dir, denir ve bu durumda,

$$\langle \text{grand } \|u_o\|, v\rangle = \lim_{\substack{\lambda\to o\\ \lambda\neq o}} \frac{\|u_o+\lambda v\| - \|u_o\|}{\lambda}$$

yazılır.

<u>ÖRNEKLER:</u> 1) $(S,A,\mu)$ herhangi bir ölçüm uzayı, $E = L^p_\mu(S)$, $1<p<+\infty$, ve $u \in E, u \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\text{grad } \|u\|_p = \|u\|_p^{1-p} |u(.)|^{p-2} u(.)$$

dir [Köthe,I, s:351], [Vainberg, 2; s:23].

2) $\Omega \subseteq R^n$ bir açık ve sınırlı küme, M türevi sürekli olan bir Young fonksiyonu, $E = E_M(\Omega)$ (Orliz uzayı) ve $\| \|_{(M)}$ de Luxemburg normu olsun. Bu durumda,

$$\operatorname{grad} \|u\|_{(M)} = \frac{p\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right)}{\int_\Omega p\left(\frac{u}{\|u\|_{(M)}}\right) \frac{u}{\|u\|_{(M)}} d\mu}$$

dir. Burada, $p$, $M$ nin türevidir. Bu örnekte $M(t) = \frac{1}{p}|t|^p$ alırsak, örnek 1'i buluruz [Krasnoselskii-Rutinckii,I, s:188].

3) $\Omega \subseteq R^n$ bir açık küme, $E = W^{m,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $m \in IN$, Sobolev uzayı,

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right]^{1/p} \text{ ve } u \in E,\ u \neq 0, \text{ olsun.}$$

örnek 1'den veya, normun gradyanının genel özelliklerinden [Vainberg,2, s: 25, lemma 2.5] itibaren,

$$\operatorname{grad} \|u\|_{m,p} = \|u\|_{m,p}^{1-p} \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u)$$

dır.//

Aşağıdaki teorem son iki tanımla verilen "pürüzsüz"lük ve normun "Gâteaux-türevli"liği kavramlarının eşdeğer olduğunu söylüyor. İspat için [Diestel, s: 22] veya [Köthe,I, s: 350] ye bakınız.

TEOREM I.2.3- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Aşağıdaki iki koşul

1) $(E,\|\ \|)$ bir pürüzsüz Banach uzayıdır.

2) $E$ nin normu, $\|\ \|$, her $u_o \in S(E)$ da Gâteaux-türevlidir.

eşdeğerdirler.//

Bir Banach uzayının kesin-konveks veya pürüzsüz oluşu, uzayın düalinin pürüzsüz veya kesin-konveks oluşuna bağlıdır. Bu da aşağıdaki teoremin ifadesidir. İspat için [Diestel, s: 23] e bakınız.

TEOREM I.1.4- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Bu durumda,

1) Eğer, $(E',\|\ \|')$ kesin-konveks ise, $(E,\|\ \|)$ pürüzsüzdür.

2) Eğer, $(E',\|\ \|')$ pürüzsüz ise, $(E,\|\ \|)$ kesin-konvektir. Eğer $(E,\|\ \|)$ refleksif ise,

3) $(E',\|\ \|')$ nin pürüzsüz (kesin-konveks) olması için gerek ve yeter şart $(E,\|\ \|)$ nin kesin-konveks (pürüzsüz) olmasıdır.//

Burada, geçerken, Önerme I.1.1 in, Teorem I.1.4/1'den yararlanarak da gösterilebileceğine işaret edelim.

I.1.3- DÜZGÜN-KONVEKS (Uniformly Convex) BANACH UZAYLARI

Düzgün-konvekslik kesin-konvekslikten daha kuvvetli bir kavramdır. Bu kavramda söz konusu olan şey, kesin-konvekslikte olduğu gibi, yine birim kürenin "yuvarlak" oluşudur. Ama, burada bu "yuvarlak"lığın "düzgün" olması gerekmektedir.

TANIM I.1.4- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer, aşağıdaki koşul,

$$\forall\varepsilon>0\ (0<\varepsilon<2)\ \exists\,\delta>0;\ u,v\in S(E),\ \|u-v\|\geqslant\varepsilon \Rightarrow \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\leqslant 1-\delta.$$

sağlanıyor ise, $(E,\|\ \|)$ bir "düzgün-konveks Banach uzayı"dır, denir.

ÖRNEKLER: 1) Her Hilbert uzayı, eşkenar dörtken bağıntısından yararlanarak gösterilebileceği gibi, düzgün-konvekstir.

2) Herhangibir ölçüm uzayı $(S,A,\mu)$ için $E = L^p_\mu(S)$, $1<p<+\infty$, $\|\ \|_p$ norm için, Clarkson eşitsizliklerinden itibaren gösterilebileceği gibi, düzgün-konvektir. [Clarkson, s: 396-414], [Hewitt-Stromberg, s: 223] [Köthe,I, s: 365], [Adams, s: 35].

3) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $E = W^{m,p}(\Omega)$, $1<p<+\infty$, Sobolev uzayı olsun. $(E,\|\ \|_{m,p})$ bir düzgün-konveks Banach uzayıdır. [Adams, s: 47]//.

Çoğu kez, Tanım I.1.4 yerine, ona eşdeğer olan, aşağıdaki teoremin ifadesi kullanılır.

TEOREM I.1.5- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. $(E,\|\ \|)$ nin düzgün konveks olması için gerek ve yeter koşul

$$\|u_n\| \le 1 \ , \ \|v_n\| \le 1 \text{ ve } \lim_{n\to+\infty} \|u_n - v_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|u_n - v_n\| = 0$$

ifadesinin sağlanmasıdır.// [Köthe,I, s: 353].

Aşağıdaki teoreme göre, düzgün konvekslik uzayın yalnızca normuna değil, uzayın topolojisine de bağlıdır: refleksif olmayan bir uzayın normunu özdeş bir norm ile değiştirerek uzayı düzgün-konveks yapmak olanaksızdır.

TEOREM I.1.6- [Milman]. Her düzgün-konveks Banach uzayı refleksiftir [Wilansky, s: 109], [Yosida, s: 127], [Diestel, s: 27].

Düzgün-konveks Banach uzaylarının kalıtımsal özellikleri de aşağıdaki teoremde toplanmıştır [Göthe,I, s: 360], [Clarkson, s: 398].

TEOREM I.1.7- 1) Bir düzgün-konveks Banach uzayının her kapalı alt uzayı da bir düzgün-konveks Banach uzayıdır.

2) Eğer, $(E_1, \|\ \|_1), \ldots, (E_n, \|\ \|_n)$ düzgün-konveks Banach uzayları,

$$E = \prod_{k=1}^{n} E_k \text{ ve } \|u\|_p = \left[\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|_k^p\right]^{1/p}, \ 1<p<\infty \ , \text{ ise, } (E, \|\ \|_p) \text{ de}$$

bir düzgün-konveks Banach uzayıdır.//

## I.1.4- YEREL DÜZGÜN-KONVEKS (locally uniformly convex) BANACH UZAYLARI

Yerel düzgün konvekslik, kesin-konvekslikten daha kuvvetli fakat düzgün-konvekslikten daha zayıf, bir ara kavramdır. Bu kavram da, kesin-konvekslik ve düzgün-konvekslik kavramları gibi, birim kürenin "yuvarlak"lığı ile ilgili bir kavramdır.

TANIM I.1.5- $(E, \|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer aşağıdaki koşul,

$$\|u_n\| = 1, \ \|u_o\| = 1, \ \lim_{n\to+\infty} \|u_n + u_o\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u_o\| = 0$$

sağlanıyor ise, $(E, \|\ \|)$ bir "yerel düzgün-konveks Banach uzayı" dır, denir.

Yukarıda da işaret edildiği ve Teorem I.1.5'den de açıkça görüldüğü gibi, düzgün-konveks Banach uzayları yerel düzgün-konvekstirler. O halde, $L^p$ uzayları $(1<p<+\infty)$ ve Sobolev uzayları yerel düzgün-konvekstirler.

Yerel düzgün-konveks Banach uzayları ile ilgili aşağıdaki iki önemli teoreme ihtiyacımız olacak. Bu teoremlerden ilk Teorem I.1.1'in bir benzeri; ikincisi ise dizilerin yakınsaklığı ile ilgilidir.

<u>TEOREM I.1.8</u>- $(E,\|\ \|)$ bir refleksif Banach uzayı olsun. E nin verilen normuna özdeş öyle bir $\|\ \|_1$ normu vardır ki, bu norm için E ve düali aynı zamanda yerel düzgün-konvekstirler [Trojanski, s: 178, Corollary, 3 ve 6].

<u>TEOREM I.1.9</u>- $(E,\|\ \|)$ Bir yerel düzgün-konveks Banach uzayı olsun. Eğer, $(u_n)_{n\in IN} \subseteq E$, $u = \sigma(E,E')-\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ve $\|u\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\| = 0$ dır. [$\sigma(E,E')$, E nin zayıf topolojisini göstermektedir].

<u>İSPAT</u>: Eğer, $u = 0$ ise, ispat edecek bir şey yoktur. O halde $u \neq 0$ ve $u_n \neq 0$ kabul edip, $u'_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ ve $u' = \dfrac{u}{\|u\|}$ koyalım. $u'_n$ ve $u'$ nün S(E) de oldukları açıktır ve dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \|u'_n\| = 1 = \|u'\|$$

ve varsayımlardan dolayı da,

$$u' = \sigma(E,E') - \lim u'_n$$

dır. İyi bilinen bir özelliğe göre,

$$\|u'_n + u'\| = \sup_{f\in B(E')} \langle f, u'_n + u'\rangle_{E',E}$$

dir. O halde

$$\lim\inf \|u'_n + u'\| = \lim\inf \left[\sup_{f\in B(E')} \langle f, u'_n + u'\rangle_{E',E}\right]$$

dır. Ama, her $f \in B(E')$ için,

$$\langle f, u'_n + u' \rangle_{E',E} \leq \sup_{f \in B(E')} \langle f, u'_n + u' \rangle_{E',E}$$

ve dolayısıyla, her $f \in B(E')$ için,

$$\liminf \|u'_n + u'\| \geq \liminf \langle f, u'_n + u' \rangle_{E'E} = 2 \langle f, u' \rangle_{E'E} \qquad \text{(I)}$$

dir. Hahn-Banach teoremine göre, $\langle f, u' \rangle_{E'E} = 1$ olarak şekilde bir $f \in S(E')$ vardır. (I) bağıntısında bu f yi kullanırsak,

$$\lim\inf \|u'_n + u'\| \geqslant 2$$

buluruz. Diğer taraftan, $\|u'_n + u'\| \leqslant \|u'_n\| + \|u'\| \leq 2$ olduğu için

$$\lim\sup \|u'_n + u'\| \leq 2$$

ve sonuç olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \|u'_n + u'\| = 2$$

dir. Şimdi, uzayımızın yerel düzgün-konveks olduğunu kullanırsak,

$$\lim_{n\to\infty} \|u'_n - u'\| = 0$$

buluruz. Buradan da,

$$\|u_n - u\| = \| \, \|u_n\| \, u'_n - \|u\| \, u'\| \leq \|u_n\| \, \|u'_n - u'\| + | \, \|u_n\| - \|u\| \, | \, \|u'\|$$

yazarak,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$$

olduğunu görürüz.//

## I.1.5- DÜZGÜN PÜRÜZSÜZ (Uniformly Smooth) BANACH UZAYLARI

Teorem I.1.4'de "pürüzsüz"lük ile "kesin-konveks"liğin "düal" kavramlar olduğunu gördük. Aynı şekilde, "düzgün-konveks" liğin "düal" kavramı da "düzgün-pürüzsüz"lüktür.

TANIM I.1.6- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer aşağıdaki koşul,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall u\in S(E)\ \ \forall v\in E,\ \|v\|<\delta \Rightarrow \|u+v\|+\|u-v\|<2+\varepsilon\|v\|$$

sağlanıyor ise, $(E,\|\ \|)$ bir "düzgün-pürüzsüz Banach uzayı"dır, denir.//

ÖRNEKLER: 1) Herhangi bir ölçüm uzayı $(S,A,\mu)$ için, $(L^p_\mu(S),\|\ \|_p)$ $1<p<\infty$, bir düzgün-pürüzsüz Banach uzayıdır. [Aşağıdaki Teorem I.1.10, veya Holmes,I, s:107 ye bakınız] veya [Diestel,I, s: 57].

2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme olsun. Sobolev uzayı $(W^{m,p}(\Omega),\|\ \|_{m,p})$, $1<p<+\infty$, bir düzgün-pürüzsüz Banach uzayıdır [Holmes,I, s:107] [Bu kaynakta Sobolev uzaylarının düzgün pürüzsüz olduğu söylenmekte, ama ispatı verilmemiştir; ispatı Örnek 1'den itibaren vermek mümkündür].

Pürüzsüzlükte olduğu gibi, düzgün-pürüzsüzlük kavramı da normun türevlenebilirliği ile ilgilidir.

TANIM I.1.7- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer, her $u\in S(E)$ için, aşafıdaki ifadeyi gerçekleyen bir $f_u \in E'$ var ise,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \ 0<\|v\|<\delta \Rightarrow \sup_{u\in S(E)} \frac{\left|\|u+v\|-\|u\|-f_u(v)\right|}{\|v\|} < \varepsilon$$

E nin normu "düzgün Fréchet-türevli"dir, denir.//

Aşağıdaki teorem bu son iki tanım ile verilen iki kavramın eşdeğer olduğunu belirtmektedir.

TEOREM I.1.10- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Aşağıda üç ifade eşdeğerdir.

1) $(E,\|\ \|)$ düzgün-pürüzsüzdür.

2) $(E'\|\ \|')$ düzgün-konvekstir.

3) E nin normu düzgün Fréchet-türevlidir. [Diestel,I, s: 36]

Teorem I.1.6 ve Teorem I.1.10/2'ye göre her düzgün-pürüzsüz Banach uzayı refleksiftir. Ayrıca, "düzgün-konveks"lik ile "düzgün-pürüzsüz"lük kavramlarının "düal" kavramlar olduğuna ifade eden aşağıdaki teorem vardır.

TEOREM I.1.10- $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Aşağıdaki üç ifade eşdeğerdirler.

1) $(E,\|\ \|)$ düzgün-konvekstir.

2) $(E',\|\ \|')$ düzgün-pürüzsüzdür.

3) E' nün normu düzgün Fréchet-türevlidir. [Diestell, s: 38]

UYARI: $(E,\|\ \|)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer, E''' pürüzsüz veya E'' yerel düzgün-konveks ise, E refleksiftir. Ama, E'' nün kesin-konveks olması E nin refleksif olmasını gerektirmez.

ÖRNEK: $M(t) = t^2 e^{t2}$, $\Omega \subseteq R^n$ açık ve sınırlı, $E = E_M(\Omega)$, Orlicz uzaylı olsun. E nin üzerine Orlicz veya Luxemburg normunu koyalım. $E'' = L_M(\Omega)$ kesin-konvekstir ama refleksif değildir. Orlic uzayları için [Krasnoselskii-Rutinckii]; Orlicz uzayların kesin-konveksliği için [Sunderason, s: 1353-56] na bakınız.

## KISIM I.2- LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLER İLE İLGİLİ ÖN BİLGİLER

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız birkaç sınıf operatörler ile ilgili tanım ve teoremler toplanmıştır. Bunlar "monoton", "h-sürekli" (hemicontinuous), "p-monotor" (pseudo-monotone) ve "düalite" operatörleri ile ilgili tanım ve teoremlerdir. Bu operatörler, F.Browder, H.Brezis, J.Leray, J.L.Lions, M.Minty, M.Vainberg, M.I.Vishik... gibi matematikçiler tarafından incelenmiş ve kullanılmıştır. Biz, burada daha çok [Brezis,1] ve [Vainberg, 2] yi takip edeceğiz.

Çalışmamızda kullanacağımız operatörler ya bir Banach uzayı E den onun duali E' ne; veya E'' den E' ne giden operatörler olacaktır. Aşağıdaki tanım ve teoremler bu iki hali de içerecek şekilde verilmiştir. Bu tanım ve teoremlerde $(X,Y,\langle\rangle)$ bir düal çifttir. [(Horwath, s: 183 ve sonrakiler.]. $\sigma(X,Y)$ ile X sin, $\sigma(Y,X)$ ile de Y nin zayıf topolojileri gösterilecektir.

## I.2.1- MONOTON VE H-SÜREKLİ (Hemicontinuous) OPERATÖRLER

Monotonlukkavramı sayısal bir $P:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için bilinen monotonluk $(\forall x,y\in\mathbb{R},\ (f(x)-f(y)).(x-y) \geq 0)$ kavramının bir genellemesidir. Bu kavram 1955-56 lardan sonra detaylı olarak incelenmiş ve çeşitli yönlerde genelleştirilmiştir [Brezis,2.]. [Vainberg,2]. Monoton operatörler, lineer olmayan operatörler içerisinde en önemli sınıflardan birini oluşturmaktadır.

TANIM I.2.1- $D \subseteq X$ bir boş olmayan küme ve $T:D \to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $u,v\in D$ için,

$$\langle T(u)-T(v),\ u-v\rangle \geq 0$$

ise, T, D üzerinde "monoton"dur, denir. Eğer $u \neq v$ için,

$$\langle T(u) - T(v),\ u-v\rangle > 0$$

ise, T, D üzerinde "kesin-monoton"dur, denir.

ÖRNEKLER: 1) $(H,\langle\rangle)$ bir Hilbert uzayı ve $K \subseteq H$ bir boş olmayan kapalı, konveks küme olsun. Her $u\in H$ için, $T(u) = P_K u$, u nın K üzerine metric izdüşümü, alalım. $T : H \to H$ monotondur. Zira, her $u,v\in H$ için,

$$\langle p_K u-p_K v\ ,\ u-v\rangle \geq \| p_K u-p_K v \|^2$$

dir.

2) $(S,A,\mu)$ herhangibir ölçüm uzayı, $X = L^p_\mu(S)$, $1<p<+\infty$ $y = L^q_\mu(S)$ $(1/p + 1/q = 1)$ ve, $u\in X, u \neq 0$ için, $T(u) = \text{grad}\,\|u\|_p$ olsun. $T: X\setminus\{0\} \to Y$ kesin-monotondur. [Vainberg,2, s: 25].//

Önemli sonuçlar elde edebilmek için monotonluğa, çok zayıf bir süreklilik olan, h-sürekliliği eklemek çoğu zaman yeterli olmaktadır.

TANIM I.2.2- $D \subseteq X$ boş olmayan bir konveks küme ve $T: D \to Y$ bir operatör olsun. Eğer, her $u,v\in D$ ve $0\leq t\leq 1$ için,

$$\lim_{t\to 0+} \langle T(u + t(v-u)),\ u-v\rangle = \langle T(u),\ u-v\rangle$$

ise, T, D üzerinde "h-sürekli"dir, denir.

ÖRNEKLER: 1) Yukarıda verilen örneklerde $T(u) = P_K(u)$, H üzerinde; $T(u) = \mathrm{grad}\|u\|_p$, $L^p_\mu(A)\setminus\{0\}$ üzerinde h-süreklidirler. [Gerçekte, her iki operatörde süreklidir.]

2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $X = W_o^{1,p}(\Omega)$ [$W_o^{1,p}(\Omega)$, $D(\Omega)$ nın $W^{1,p}(\Omega)$ da kapanışıdır.], $1<p<\infty$, $Y = X'$ ve, $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$ için,

$$T(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial xi} \left|\frac{\partial u}{\partial xi}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial xi}$$

[$\frac{\partial u}{\partial xi}$, u nın distribüsyon manasında türevidir.], alalım. $T:X \to X'$ h-süreklidir. [Lions,I, s: 174-176].//

Bu iki kavram ile ilgili sık sık kullanacağımız iki önerme de şunlardır:

ÖNERME I.2.1- $D \subseteq X$, $D \neq \phi$, bir konveks küme ve $T : D \to Y$ monoton ve h-sürekli olan bir operatör, olsunlar. Eğer, $(u_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq D$ bir $\sigma(X,Y)$-yakınsak ağ, $u = \sigma(X,Y)\text{-}\lim u_\alpha$ ve $\lim\sup\langle T(u_\alpha), U_A - u\rangle \leq 0$ ise, her $v \in D$ için,

$$\langle T(u), u-v\rangle \leq \liminf \langle T(u_\alpha), u_\alpha - v\rangle$$

dir. [Brezis,I, s: 122].

ÖNERME I.2.2- $T : X \to Y$ monoton ve h-sürekli olan bir operatör olsun. Bu durumda,

1) Eğer, $(u_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq X$ bir $\sigma(X,Y)$-yakınsak ağ, $u = \sigma(X,Y)\text{-}\lim u_\alpha$, $f = \sigma(Y,X)\text{-}\lim T(u_\alpha)$ ve $\lim\sup \langle T(u_\alpha), u_\alpha\rangle \leq \langle f,u\rangle$ ise, $T(u) = f$ dir.

2) T , X sin her sonlu-boyutlu alt-uzayı F den $(Y,\sigma(Y,X))$ye süreklidir. [Brezis,I, s: 122-123.]

## I.2.2- P-MONOTON (Pseudo-Monotone) OPERATÖRLER

P-monoton operatörler sınıfı H.Brezis [Brezis,I] tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Uygulama, p-monoton operatörlerin, varyasyonel eşitsizliklerin incelenmesinde en uygun operatör sınıfı olduğunu ortaya koymuştur. P-monoton operatörler, "pseudo" sözcüğünden de anlaşılacağı gibi, "monoton" değildirler. Ama, birazdan göreceğimiz gibi, monoton ve h-sürekli olan her operatör p-monotondur.

TANIM I.2.3- $D \subseteq X$ , $D \neq \phi$, bir konveks küme ve $T : D \to Y$ bir operatör olsunlar. Eğer, aşağıdaki iki koşul:

PM1) Eğer, $(u_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq D$ nin bir $\sigma(X,Y)$-tıkız alt kümesinden alınmış, $\sigma(X,Y)$-yakınsak bir ağ, $u = \sigma(X,Y)\text{-}\lim u_\alpha$ ve $\limsup \langle T(u_\alpha), u_\alpha - u\rangle \leq 0$ ise, her $v \in D$ için,

$$\langle T(u), u-v\rangle \leq \liminf \langle T(u_\alpha), u_\alpha - v\rangle$$

dir.

PM2) Her $v \in D$ için, $u \in D \to \langle T(u), u-v\rangle \in \mathbb{R}$ fonksiyonu D nin $\sigma(X,Y)$-tıkız alt kümeleri üzerinde alttan sınırlıdır.
sağlanıyor ise, T,D üzerinde "p-monoton"dur, denir.

ÖRNEK: Tanım I.2.2'den hemen sonra verilen örneklerde kullanılan operatörler, Önerme I.2.1'e göre, p-monotondurlar. Ayrıca, önerme I.2.1'e göre D üzerinde monoton ve h-sürekli olan her operatör p-monotondur. Zira, bu durumda, PM1) koşulunun sağlandığı Önerme I.2.1'in ifadesidir. PM2) koşulunun sağlandığı ise, monotonluktan, açıktır.

İki p-monoton operatörün toplamı p-monoton değildir. Ama, eğer operatörlerden biri monoton ve h-sürekli ise toplam operatör p-monotondur.

ÖNERME I.2.3- Eğer $D \subseteq X, D \neq \phi$, bir konveks küme, $T:D \to Y$ p-monoton, ve $S: D \to Y$ monoton ve h-sürekli ise, T+S p-monotondur [Brezis,I, s: 133].

Varyasyonel eşitsizliklerin çözümünün varlığı ile ilgili aşağıdaki önemli teorem çalışmamızda önemli rol oynayacaktır.

TEOREM I.2.1- $D \subseteq X$ , $D \neq \phi$, bir konveks küme ve $T : D \to Y$ bir p-monoton operatör, olsunlar. Eğer, aşağıdaki koşul:

(c) D nin $\sigma(X,Y)$-tıkız olan öyle bir konveks kümesi $\Gamma$ ve $w_o \in \Gamma$ vardır ki, her $u \in D$, $u \notin \Gamma$ için, $\langle T(u), u-W_o\rangle > 0$ dir. sağlanıyor ise, en az bir $u_o \in \Gamma$ için,

$$\forall\, v \in D,\ \langle T(u_o),\ w_o - v\rangle \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliği, sağlanır. [Brezis,I, s: 138]

## I.2.3- DÜALİTE OPERATÖRLERİ

Düalite operatörleri, kendisi ve düali kesin-konveks olan bir Banach uzayı $(E, \|\ \|)$ den onun duali $(E', \|\ \|')$ giden kanonik operatörlerdir. Düalite operatörleri, Banach uzaylarını, bir bakıma, "Hilbert"leştirmektedir. Bu da, Hilbert uzayları için bilinen kavram ve tekniklerin, bir ölçüde, Banach uzaylarına taşınmasını mümkün kılmaktadır.

Düalite operatörleri hakkında geniş bilgi [Browder, 1,2,3] [Vainberg,2] ve [Lions,I] de bulunabilir. Ayrıca, çalışmamızın ikinci bölümünde düalite operatörleri genelleştirilmiş ve detaylıca incelenmiştir.

TANIM I.2.4- $(E, \|\ \|)$ bir Banach uzayı ve $J:E \to E'$ bir operatör olsun. Eğer, aşağıdaki iki koşul

1) $\forall\, u \in E,\ \langle J(u), u\rangle_{E',E} = \|u\|^2$

2) $\forall\, u \in E,\ \|J(u)\|' = \|u\|$

sağlanıyor ise, J ye bir "düalite operatörü"dür, denir.

ÖRNEKLER: 1) $(H, \langle\rangle)$ bir Hilbert uzayı olsun; H ile H' eşitliyelim. $J : u \in H \to J(u) = u \in H'$ operatörü H üzerinde tek düalite operatörüdür.

2) $(S, A, \mu)$ herhangi bir ölçüm uzayı ve $E = L^p_\mu(S)$, $1 < p < +\infty$, olsun. $u \in E$ için, $J(u) = \|u\|_p^{1-p} |u|^{p-2} u$ operatörü E den E' giden ve 1) ve 2) koşullarını sağlayan bir operatördür. O halde, J bir düalite operatörüdür.

TEOREM I.2.2- $(E,\| \ \|)$ kendisi ve düali kesin-konveks olan bir Banach uzayı olsun. Bu durumda, E den E' ne bir, ve bir tek, düalite operatörü vardır. Ayrıca, bu operatör kesin-monoton ve h-süreklidir. [Lions,1, s: 174-76] [Vainberg, 2, s: 266-69], [Browder,1, s: 348-49], [Browder, 2, s: 101-102].

## I.2.4- GÂTEAUX TÜREVİ VE ALT-GRADYAN

Gâteaux türevi, $\mathbb{R}^n$ de bilinen "bir vector boyunca" (directional) türev kavramının genellemesidir.

TANIM I.2.5- $(E,\| \ \|)$ bir Banach uzayı, $D \subseteq E$ bir açık küme, $\Phi: D \to R$ bir fonksiyon ve $u \in D$ bir eleman, olsunlar. Eğer aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $f_u \in E'$

$$\forall\, v \in E,\ \lim_{\substack{\lambda \to o \\ \lambda \neq o}} \frac{\Phi(u+\lambda v)-\Phi(u)}{\lambda} = \langle f_u, v\rangle_{E',E}$$

var ise, $\Phi$, $u_o$ da "Gâteaux-türevli"dır, denir ve $f_u$, grand $\Phi(u)$ ile gösterilir.

ÖRNEK: $E=C([0,1])$, $[0,1]$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı, olsun. E, $\|u\|_\infty = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$ normu için bir Banach uzayıdır.

$g: (x,t) \in R \times [0,1] \to R$ sürekli, x se göre türevli ve $g'_x$ sürekli olan bir fonksiyon olsun. $\Phi: u \in E \to \Phi(u) = \int_0^1 g(u(t),t)\, dt$ alalım. $\Phi$ fonksiyonu, çabucak görülebileceği gibi, E üzerinde Gâteaux türevlidir ve $\langle \text{grand}\, \Phi(u), v\rangle_{E',E} = \int_0^1 g'_x(u(t),t).v(t)\, dt$. dır.

Gâteaux-türevlenebilirlikten biraz daha zayıf olan bir "türev" kavramı da, "alt-differensiyellenebilirlik" kavramıdır.

TANIM I.2.6- $(E,\| \ \|)$ bir Banach uzayı, $D \subseteq E$ bir açık küme, $\Phi: D \to R$ bir fonksiyon ve $u_o \in D$ bir eleman, olsunlar, Eğer, aşağıdaki eşitliği sağlayan bir $f \in E'$

$$\forall\, u \in D\,,\ \langle f, u-u_o\rangle_{E',E} \leq \Phi(u)-\Phi(u_o)$$

var ise, $\Phi$, $u_o$ da "alt-differensiyellenebilir" denir. Bu durumda, f ye $\Phi$ nin $u_o$ da bir "alt-grandyan"ıdır, denir ve $\Phi$ nın $u_o$ daki alt grandyanlarının kümesi $\partial\Phi(u_o)$ ile gösterilir.

ÖRNEK: $E = R$, $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $x_o \in \mathbb{R}$, olsunlar. $\partial\Phi(x_o) = [f'-(x_o),\ f'+(x_o)]$ dır; burada $f'-(x_o)$ ve $f'+(x_o)$, f nin $x_o$ da sol ve sağ yarı-türevleridir.

Alt-gradyan ve Gâteaux türevi kavramları arasındaki ilişkiyi belirleyen aşağıdaki teorem vardır.

TEOREM I.2.3- $(E, \|\ \|)$ bir Banach uzayı, $D \subseteq E$ bir açık küme, $\Phi: D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u_o \in D$ bir eleman, olsunlar. Eğer, $\Phi$, $u_o$ da Gâteaux türevli ise, grad $\Phi(u_o)$, $\Phi$ nin $u_o$ daki tek alt-gradyanıdır. Ayrıca, eğer D konveks, $\Phi$ konveks, ve D üzerinde Gâteaux-türevli ise, $T(u) = \text{grad}\,\Phi(u)$ operatörü D üzerinde monotondur. [Ekland-Temam, s: 23-25].

# BÖLÜM II: İZDÜŞÜM KAVRAMININ, LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLER TEORİSİ YARDIMI İLE, BİR GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölüm iki kısımdan oluşmuştur:

KISIM II.1- Genelleştirilmiş düalite operatörleri

ve

KISIM II.2- Refleksif Banach uzaylarında T-izdüşüm

başlıklarını taşımaktadır. Tezin 'SUNUŞ' kısmında her bölümde yapılanlar geniş olarak özetlenmiş olduğundan, burada, bu bölümde yapılanları tekrar özetlemekten kaçındık. Ancak, her kısımın girişinde, o kısımda yapılanların kısa bir özeti verilmiştir.

Bu bölümde $(E, \|\ \|)$ bir Banach uzayı olacaktır. E ve E' nün zayıf topolojilerini $\sigma(E, E')$ ve $\sigma(E', E'')$ ile; E' ve E" nün zayıf-yıldız topolojilerini ise, $\sigma(E', E)$ ve $\sigma(E'', E')$ ile göstereceğiz. E yi, kanonik gömme ile, E" nün bir alt uzayına eşitlenmiş olarak düşüneceğiz.

## KISIM II.1- GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜALİTE OPERATÖRLERİ

Düalite operatörlerinin tanımını ve önemli özelliklerini Kısım I.2/3°'de hatırlattık. Bu operatörler E den E' giden kanonik operatörlerdir. 'Genelleştirilmiş düalite operatörleri' diye, E" nün, E den daha büyük, bir $\Lambda$ alt kümesinden, E' giden ve düalite operatörlerin özelliklerine benzer özelliklere sahip operatörlere diyeceğiz. Bu $\Lambda$ kümesi E" nün de, norm-topoloji için, yoğundur; ve, biraz ileride ifadesini hatırlatacağımız, James'e ait bir teoreme göre, $\Lambda = E''$ eşitliği yalnızca refleksif uzaylar için mümkündür. Uzay reflektif olduğu zaman $\Lambda = E = E''$ olmakta ve bu durumda, genelleştirilmiş düalite operatörleri düalite operatörlerine dönüşmektedir. Bu operatörler 'genelleştirilmiş' düalite operatörleri dememizin nedeni de budur.

Düalite operatörleri Hahn-Banach teoremi yardımı ile inşa edilmektedir [Lions, I, s: 174-76], [Vainberg, 2, s: 266-69], [Browder, 1, s: 338-51]. Genelleştirilmiş düalite operatörlerini ise, aşağıda ifadesini hatırlatacağımız, Bishop-Phelps'e ait bir teorem yardımı ile inşa ettik. Bu açıdan, burada yapılanlara, düalite operatörlerine ikinci bir yaklaşım olarak da bakılabilir. Özet olarak, Kısım II.1'de genelleştirilmiş düalite operatörleri inşa edilmiş ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Yukarıda sözü edilen, Bishop-Phelps ve James teoremlerinin ifadelerini, çalışmamız için öneminden dolayı, burada hatırlatmayı uygun bulduk.

TEOREM [Bishop-Pleps]: $(E,\|\ \|)$ bir gerçel Banach uzayı ve

$$M = \{f\in E'/\exists u\in B(E): f(u) = \|f\|'\}$$

olsun. Bu durumda, M kümesi E'de, norm-topolojisi için, yoğundur [Bishop-Phelps, I, s: 97-98].

TEOREM [James]: $(E,\|\ \|)$ bir gerçel Banach uzayı ve

$$M = \{f\in E'/\exists u\in B(E), f(u) = \|f\|'\}$$

olsun. $M = E'$ olması için gerek ve yeter koşul E nin refleksif olmasıdır [Holmes, 2, s: 157, 168].

Biz burada, Bishop-Phelps teoremini E yerine E' alarak kullanacağız. Bunun için,

$$\Lambda = \{u\in E''/\exists f\in B(E'), \langle u,f\rangle_{E'',E'} = \|u\|''\}$$

koyalım. Bishop-Phelps teoremine göre $\Lambda$ kümesi E'' nün de, norm-topolojisi için, yoğundur. James teoremine göre de, $\Lambda = E''$ olması için gerek ve yeter koşul E nin refleksif olmasıdır. Şimdi $\Lambda$ nin diğer bir iki özelliğini gösterelim.

ÖNERME II.1.1- 1) $E \subseteq \Lambda$ dır

2) Eğer, $u\in\Lambda$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ ise, $\lambda u\in\Lambda$ dır.

İSPAT: 1) $u \in E$ olsun. $\hat{u}: f \in E' \to \hat{u}(f) = \langle f,u\rangle_{E',E}$ fonksiyonu $\sigma(E,E')$ topolojisi için süreklidir. Diğer taraftan, Hahn-Banach teoremine göre

$$\|u\| = \sup_{f \in B(E')} \langle f,u\rangle_{E',E} \quad \text{ve} \quad \|\hat{u}\|'' = \|u\|$$

dır. Alaoğlu-Bourbaki teoremine göre, $B(E')$ kümesi, $\sigma(E',E)$ topolojisi için, tıkızdır. O halde, $\hat{u}$, $\sigma(E,E')$ sürekli olduğundan, en az bir $f_u$ $B(E')$ için

$$\hat{u}(f_u) = \sup_{f \in B(E')} \langle f,u\rangle_{E',E} = \|\hat{u}\|''$$

yani

$$\|u\| = \langle f_u,u\rangle_{E',E}$$

dır. Bu da, $\Lambda$ nın tanımı gereği, $u \in \Lambda$ demektir.

2) $u \in \Lambda$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ olsun. $u = 0$ veya $\lambda = 0$ ise, ispat edecek birşey yoktur. O halde, $u \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ alabiliriz. $\Lambda$ nın tanımından en az bir $f_u \in B(E')$ için, $\|u\|'' = u,f_{uE'',E'}$ dir. $\varepsilon = \lambda/|\lambda|$ alalım. $f_u \in B(E')$ dir ve $\|\lambda u\|'' = |\lambda|\ \|u\|'' = \langle\lambda u, \varepsilon f_u\rangle_{E'',E'}$ dır. O halde, $\lambda u \in \Lambda$ dır.//

Aşağıdaki önerme 'uç' (extreme) noktalar ile ilgili teoremlere göre -örneğin, [Holmes-2, s: 74]- açıktır. Ama, genelleştirilmiş düalite operatörlerini bu önerme yardımı ile inşa edeceğimiz için, ispatı doğrudan yapmayı uygun bulduk.

ÖNERME II.1.2- 1) $u \in E''\setminus\{0\}$ olsun. Eğer, $f \in B(E')$ ve $\langle u,f\rangle_{E'',E'} = \|u\|''$ ise, $\|f\|' = 1$ dir.

2) Eğer, $(E',\|\ \|')$ kesin-konveks ise, her $u \in \Lambda\setminus\{0\}$ için, bir ve bir tek, $f_u \in B(E')$, $\langle u,f_u\rangle_{E'',E'} = \|u\|''$ eşitliğini sağlar.

İSPAT: 1) $u \in E''\setminus\{0\}$, $f \in B(E')$ ve $\langle u,f\rangle_{E'',E'} = \|u\|''$ olsun. Eğer, $\|f\|' < 1$ olmuş olsa idi, $\|u\|'' = \langle u,f\rangle_{E'',E'} \leq \|u\|'' < \|f\|'\ \|u\|''$ olurdu ki, bu bir çelişkidir. O halde, $\|f\|' = 1$ dir.

2) $u \in \Lambda\setminus\{0\}$ olsun. $\Lambda$ nın tanımından, en az bir $f_u \in B(E')$ için, $\|u\|'' = \langle u,f_u\rangle_{E'',E'}$ dir. 1) re göre $\|f_u\|' = 1$ dir. $(E',\|\ \|)$ kesin-konveks olduğundan, Önerme I.1.1.rin ispatını tekrarlarsak, böylesi bir $f_u$ nun tek olduğunu buluruz.//

<u>SONUÇ</u>: Eğer, $(E', \|\ \|')$ kesin-konveks ise, her $u \in \Lambda \setminus \{0\}$ için, bir, ve bir tek, $f_u \in B(E')$, $\langle u, f_u \rangle_{E'',E'} = \|u\|''$ eşitliğini sağlamaktadır. O halde, bu durumda, $u \in \Lambda \setminus \{0\} \to f_u \in E'$ dönüşümü iyi-tanımlanmış bir dönüşümdür. $u=0$ için $f_u = 0$ koyarak bu dönüşümü $\Lambda$ ya teşmil edeceğiz.

Genelleştirilmiş düalite operatörlerini $u \in \Lambda \to f_u \in E'$ dönüşümünden yararlanarak tanımlıyacağımız için, <u>bundan böyle $(E', \|\ \|')$ uzayının kesin-konveks olduğunu varsayacağız</u>.

<u>TANIM II.1.1</u>- $\phi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sürekli, kesin-artan, $\phi(0) = 0$ ve $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$ olan bir fonksiyon olsun. $\phi$ fonksiyonuna bağlı 'genelleştirilmiş düalite operatörü' diye

$$J_\phi : u \in \Lambda \to J_\phi(u) = \phi(\|u\|'')\, f_u \in E'$$

operatörüne, diyeceğiz.

## $J_\phi$ OPERATÖRÜNÜN ÖZELLİKLERİ

Aşağıdaki öneme $J_\phi$ yi karakterize etmekte ve her $\phi$ için, $J_\phi$ nin tekliğini göstermektedir.

<u>ÖNERME II.1.3</u>- Tanım II.1.3 ile tanımlanan $J_\phi$ operatörü aşağıdaki

1) $\forall u \in \Lambda$, $\langle u, J_\phi(\ ) \rangle_{E'',E'} = \phi(\|u\|'')\, \|u\|''$

ve

2) $\forall u \in \Lambda$, $\|J_\phi(u)\|' = \phi(\|u\|'')$

özelliklerine sahip, $\Lambda$ dan $E'$ ne giden, tek operatördür.

<u>İSPAT</u>: $J_\phi$ nin tanımı ve Önerme II.1.2'ye göre,

$$\forall u \in \Lambda,\ \langle u, J_\phi(u) \rangle_{E'',E'} = \phi(\|u\|'')\, \langle u, f_u \rangle_{E'',E'} = \phi(\|u\|'')\, \|u\|''$$

ve

$$\forall u \in \Lambda,\ \|J_\phi(u)\|' = \|\phi(\|u\|'')\, f_u\|' = \phi(\|u\|'')\, \|f_u\|' = \phi(\|u\|'')$$

dir. Şimdi, $J_\phi$ nin tekliğini gösterelim. $T: \Lambda \to E'$ 1) ve 2) özelliklerini sağlayan, $J_\phi$ den farklı, bir operatör olsun. Bu durumda, en az bir $u \in \Lambda \setminus \{0\}$ için, $J_\phi(u) \neq T(u)$ dır. Her iki operatör de 1) ve 2) yi sağladıkları için,

$$<u, J_\phi(u)>_{E'', E'} = \phi(\|u\|'')\ \|u\|'' = <u, T(u)>_{E'', E'}$$

ve

$$\|J_\phi(u)\|' = \phi(\|u\|'') = \|T(u)\|'$$

dir. O halde,

$$<u, \frac{J_\phi(u)}{\phi(\|u\|'')}>_{E'', E'} = <u, \frac{T(u)}{\phi(\|u\|'')}>_{E'', E'} = \|u\|''$$

dir. Bu ise, Önerme II.1.2/2 ye göre, ancak, $J_\phi(u) = T(u)$ için mümkündür. Bu çelişkiden, $J_\phi = T$ olduğunu buluruz.//

Teorem I.2.2 ye göre düalite operatörleri menotondurlar. Aşağıdaki önerme $J_\phi$ nin de aynı özelliğe sahip olduğunu söylemektedir.

<u>ÖNERME II.1.4-</u> 1) $J_\phi$ operatörü $\Lambda$ üzerinde monotondur.
2) Eğer $(E, \|\ \|'')$ kesin-konveks ise, $J_\phi$ de $\Lambda$ üzerinde kesin-monotondur.

<u>İSPAT:</u> 1) $u, v \in \Lambda$ olsun.

$$<u-v, J_\phi(u) - J_\phi(v)>_{E'', E'} = <u, J_\phi(u)>_{E'', E'} - <u, J_\phi(v)>_{E'', E'} - <v, J_\phi(u)>_{E'', E'} - <v, J_\phi(v)>_{E'', E'} \geq$$

$$\geq \phi(\|u\|'')\ \|u\|'' - \phi(\|u\|'')\|v\|'' - \phi(\|v\|'')\|u\|''\ \ \phi(\|v\|'')\|v\|'' =$$

$$= (\phi(\|u\|'') - \phi(\|v\|''))\ (\|u\|'' - \|v\|'') \qquad \text{(I)}$$

dir. $\phi$ artan bir fonksiyon olduğu için, (I) ifadesi pozitifdir. O halde, $J_\phi$, $\Lambda$ üzerinde monotondur.

2) $u, v \in \Lambda$, $u \neq v$, olsun. Eğer,

$$<u-v,\ J_\phi(u) - J_\phi(v)>_{E'',E'} = 0$$

ise, (I) e göre, $||u||'' = ||v||''$ dir. $u \neq v$ olduğu, ve $<u,\ J_\phi(u)>_{E'',E'} = 0$ yalnızca $u = 0$ için mümkün olduğundan, $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ dır. O halde $u/||u||''$, $v/||v||'' \in S(E'')$ ve $u/||u||'' \neq v/||v||''$ dır. Fakat, $(E'',||\ ||'')$ kesin-konveks olduğundan, Önerme I.1.2'ye göre

$$<\frac{u}{||u||''},\ J_\phi(u)>_{E'',E'} > <\frac{v}{||v||''},\ J_\phi(v)>_{E'',E'}$$

ve

$$<\frac{v}{||v||''},\ J_\phi(v)>_{E'',E'} > <\frac{u}{||u||''},\ J_\phi(u)>_{E'',E'}$$

dır. Şimdi, (I) bağıntısının başına döner ve bu son iki bağıntıyı kullanırsak,

$$0 = <u-v,\ J_\phi(u)-J\ (v)>_{E'',E'} = <u,\ J_\phi(u)>_{E'',E'} - <u\ J_\phi(v)>_{E'',E'} - <v,\ J_\phi(u)>_{E'',E'} -$$
$$- <v,\ J_\phi(v)>_{E'',E'} > 0$$

buluruz. Bu çelişkiden de, $J_\phi$ nin kesin-monoton olduğunu buluruz.//

Aşağıdaki önermede $J_\phi$ nin sürekliliği inceleyeceğiz. Bu önermenin ispatı bir topoloji teoremi kullanmaktadır. Bu teoremi, daha sonra da defalarca kullanacağımız için, burada hatırlatmayı uygun bulduk.

TEOREM II.1.1- $(X,\tau)$ herhangi bir tıkız Hausdorff uzayı ve $(u_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq X$ bir ağ olsun. Bu ağın bir $u\in X$ elemanına yakınsaması için gerek ve yeter koşul $u$ nın $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağının tek limit noktası olmasıdır [Bourbaki, I, s: 97].

ÖNERME II.1.5- 1) Eğer, $u_n$, $u\in E$ ve $||u_n-u||\to 0$ ise,

$$J_\phi(u_n) \xrightarrow{\sigma(E',E)} J_\phi(u) \text{ dır.}$$

2) Eğer $(E', \|\ \|')$ yerel düzgün-konveks, $u_n$, $u \in \Lambda$ ve $\|u_n - u\|'' \to 0$ ise,

$$\|J_\phi(u_n) - J_\phi(u)\|' \to 0 \text{ dır.}$$

<u>İSPAT</u>: 1) $u_n$, $u \in E$ ve $\|u_n - u\| \to 0$ olsun. Bu durumda, $\|u_n\| \to \|u\|$ ve $\phi$ sürekli olduğu için, $\phi(\|u_n\|) \to \phi(\|u\|)$ dir. O halde, önerme II.1.3'e göre, $\|J_\phi(u_n)\|' \to \|J_\phi(u)\|'$ dir. Buradan da $(J_\phi(u_n))_{n \in N}$ nin $E'$ nün bir sınırlı dizisi olduğunu söyliyebiliriz. O halde, Alaoğlu-Bourbaki teoremine göre, $(J_\phi(u_n))_{n \in N}$ dizisinin $\sigma(E',E)$-yakınsak bir alt-ağı vardır. Bu ağ $(J_\phi(u_{n_\alpha}))_{\alpha \in I}$ ve $f = \sigma(E',E) - \lim\limits_{\alpha \in I} J_\phi(u_{n_\alpha})$ olsun. $g \in E' \to \|g\|' \in R$ fonksiyonu, $\sigma(E',E)$ topolojisi için alttan-yarı sürekli olduğundan,

$$\|f\|' \leq \liminf_{I} \|J_\phi(u_{n_\alpha})\|' = \liminf \phi(\|u_{n_\alpha}\|) = (\|u\|) = \|J_\phi(u)\|'$$

dır. Diğer taraftan,

$$\langle f,u \rangle_{E',E} = \lim_{\alpha \in I} \langle J_\phi(u_{n_\alpha}), u_{n_\alpha} \rangle_{E',E} = \lim_{\alpha \in I} \phi(\|u_{n_\alpha}\|)\, \|u_{n_\alpha}\| = \phi(\|u\|)\|u\| =$$

$$= \langle J_\phi(u), u \rangle_{E',E} \qquad \text{(I)}$$

ve

$$\|f\|' \geq \langle f, \frac{u}{\|u\|} \rangle_{E',E} = \frac{1}{\|u\|} \langle f,u \rangle_{E',E} = \frac{1}{\|u\|} \langle J_\phi(u),u \rangle = \|J_\phi(u)\| \geq \|f\|'$$

olduğundan,

$$\|J_\phi(u)\|' = \|f\|' \qquad \text{(II)}$$

dir. önerme II.1.3'e göre, (I) ve (II) bağıntıları ancak $f = J_\phi(u)$ için mümkündür. Bu ise, $J_\phi(u)$ nun $(J_\phi(u_n))_{n \in N}$ sınırlı dizisinin, $\sigma(E',E)$-topolojisi için, tek limit noktası olduğunu göstermektedir. O halde, Teorem II.1.1'e göre, $J_\phi(u) = \sigma(E',E) - \lim\limits_{n \to \infty} J_\phi(u_n)$ dır.

2) $(E', \|\ \|')$ yerel düzgün-konveks, $u_n$, $u \in \Lambda$ ve $\|u_n - u\|'' \to 0$ olsun. Bu durumda, $\|u_n\|'' \to \|u\|''$ ve $\|J_\phi(u_n)\|' \to \|J_\phi(u)\|'$

dır. $(E', \|\ \|')$ yerel düzgün-konveks olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} \|J_\phi(u_n) - J_\phi(u)\|' = 0$ olduğunu göstermek için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{J_\phi(u_n)}{\|J_\phi(u_n)\|'} + \frac{J_\phi(u)}{\|J_\phi(u)\|'} \right\|' = 2$$

olduğunu göstermek yetecektir. Her zaman,

$$\left\| \frac{J_\phi(u_n)}{\|J_\phi(u_n)\|'} + \frac{J_\phi(u)}{\|J_\phi(u)\|'} \right\|' \leq 2$$

dir. Diğer taraftan,

$$\left\| \frac{J_\phi(u_n)}{\|J_\phi(u_n)\|'} + \frac{J_\phi(u)}{\|J_\phi(u)\|'} \right\|' = \sup_{v\in B(E'')} < v, \frac{J_\phi(u_n)}{\|J_\phi(u)\|'} +$$

$$+ \frac{J_\phi(u)}{\|J_\phi(u)\|'} >_{E'',E'}$$

dir. Bu son bağıntıda, $v = \frac{u_n}{\|u_n\|''}$ alırsak,

$$\lim < \frac{u_n}{\|u_n\|''}, \frac{J_\phi(u_n)}{\|J_\phi(u_n)\|'} >_{E'',E'} = 1$$

ve

$$\lim < \frac{u_n}{\|u_n\|''}, \frac{J_\phi(u)}{\|J_\phi(u)\|'} >_{E'',E'} = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{J_\phi(u_n)}{\|J_\phi(u_n)\|'} + \frac{J_\phi(u)}{\|J_\phi(u)\|'} \right\|' = 2$$

olduğunu buluruz. O halde, yerel düzgün-konveksliğin tanımı gereği,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| \frac{J_\phi(u_n)}{||J_\phi(u_n)||'} - \frac{J_\phi(u)}{||J_\phi(u)||'} \right|\right|' = 0 \qquad \text{(III)}$$

dır. $\lim_{n\to\infty} ||J_\phi(u_n)||' = ||J_\phi(u)||'$ olduğu için, (III) den,

$$\lim_{n\to\infty} ||J_\phi(u_n) - J_\phi(u)||' = 0$$

olduğunu buluruz.//

$J_\phi$ operatörünün diğer bir kısım özellikleri de aşağıdaki önermelerde incelenmiştir. Önce genel bir tanım,

<u>TANIM II.1.2</u>- $(X,\tau)$ ve $(Y,\tau')$ iki topolojik vector uzayı ve $T: X\to Y$ bir operatör olsun. Eğer, X in her sınırlı alt kümesi B için, T(B) Y nin bir sınırlı alt kümesi ise, T ye 'sınırlı'dır, denir.

<u>UYARI</u>: Lineer olmayan operatörler için 'süreklilik' ile 'sınırlılık' arasında herhangi bir bağıntı yoktur. [Krasnoselskii-Rujinckii, s: 167 ve sonrakiler] bakınız.

<u>ÖNERME II.1.6</u>- $J_\phi$ operatörü sınırlıdır, ve

$$\lim_{||u||\to+\infty} \frac{\langle u, J_\phi(u)\rangle_{E'',E'}}{||u||''} = +\infty$$

dır.

<u>İSPAT</u>: $B \subseteq \Lambda$ bir sınırlı küme olsun: $\forall u\in B, ||u||'' \leq M$. $\phi$ fonksiyonu sürekli ve artan bir fonksiyon olduğu için,

$$\sup_{u\in B} ||J_\phi(u)||' = \sup_{u\in B} \phi(||u||'') \leq \phi(M) < +\infty$$

dir. Bu ise $J_\phi(B)$ sınırlı demektir.

$$\lim_{||u||\to+\infty} \frac{\langle u, J_\phi(u)\rangle_{E'',E'}}{||u||''} = \lim_{||u||''\to+\infty} \phi(||u||'') = +\infty$$

dur; zira, $\lim\limits_{t\to+\infty}\phi(t) = +\infty$ dur.

<u>ÖNERME II.1.7</u>- 1) Her $u,v\in\Lambda$ için,

$$<u,J_\phi(v)>_{E'',E'} \le <u,J_\phi(u)>_{E'',E'} + <v, J_\phi(v)>_{E'',E'}$$

2) Eğer, $t\in R \to \phi(t)t\in R$ fonksiyonu konveks ise, $R(u) = <u, J_\phi(u)>_{E'',E'}$ fonksiyonu da $\Lambda$ nın her konveks alt kümesi üzerinde konvekstir.

<u>İSPAT</u>: 1) $u,v\in\Lambda$ olsun. $||v||'' \le ||u||''$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda,

$$<u,J_\phi(v)>_{E'',E'} \le ||u||''\,\phi(||v''||) \le ||u||''\,\phi(||u||'') + ||v||''\,\phi(||v||'') =$$

$$= <u,J_\phi(u)>_{E'',E'} + <v,J_\phi(v)>_{E'',E'}$$

dır.

2) Açıktır.

REFLEKSİF UZAYLARDA $J\phi$ NİN ÖZELLİKLERİ

Eğer $(E, ||\ ||)$ bir refleksif Banach uzavı ise, James'in bu kısımın girişinde hatırlatılan teoremine ve Önerme II.1.1'e göre, $\Lambda = E$ dir. Ayrıca, $\phi(t) = t$ alırsak, $J_\phi$ nin Tanım I.2.4 manasında bir düalik operatörü olduğu açıktır. O halde, Önerme II.1.4 ve II.1.5'e göre, $J_\phi$ operatörü monoton ve yarısürekli [norm-zayıf - yıldız] dir. Yine aynı önermelere göre, $(E, ||\ ||)$ kesin-konveks ise, $J_\phi$ kesin-monoton ve $(E', ||\ ||')$ yerel düzgün-konveks ise, $J_\phi$ $(E, ||\ ||)$ den $(E', ||\ ||')$ süreklidir. Genellikle $J_\phi$ operatörü $(E, \sigma(E,E'))$ den $(E', \sigma(E',E))$ ye sürekli değildir. Bu, $L^p$ uzayları için dahi, $L^p$ uzaylarının düzgün-konveks olmasına rağmen, doğru değildir. $L^p$ uzaylarında,

$$1<p<\infty,\ J_\phi(u) = \phi(||u||_p)\ ||u||^{1-p}\ |u(.)|^{p-2}u(.)$$

dir. Zira, bu operatör, Önerme II.1.3'ün 1) ve 2) şartlarını sağlamaktadır. $J_\phi$ nin $\sigma(L^p,L^q)$ - $\sigma(L^q,L^p)$ sürekli olmadığını gösteren örnekler çabucak bulunabilir. [Vainberg, 2, s: 285]. Ancak, $\ell^p$ uzayları için, $J_\phi$ zayıf-zayıf yıldız süreklidir.

ÖNERME II.1.9- $\phi(t) = t^{p-1}$ alalım. Bu durumda, $J_\phi : \ell^p \to \ell^q$ operatörü $\sigma(\ell^p,\ell^q)$ - $\sigma(\ell^q,\ell^p)$ süreklidir $\left[1<p<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right]$.

İSPAT: $u, u_n \in \ell^p$, $u = (u_k)_{k\in N}$, $u_n = (u_k^n)_{k\in N}$ ve $u = \sigma(\ell^p,\ell^q)-\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ olsun. Bu durumda, her $k\in N$ için, $u_k = \lim\limits_n u_k^n$ dir. Diğer taraftan $J_\phi(v) = (|v_k|^{p-2} v_k)_{k\in N}$ dir. O halde, her $k\in N$ için, $n\to\infty$ ken $|u_k^n|^{p-2} u_k^n \to |u_k|^{p-2} u_k$ gider. Bu ise, $\ell^q$ uzayında $(|u_k^n|^{p-2} u_k^n)_{n\in N}$ dizisinin zayıf yakınsadığını göstermektedir. O halde, $J_\phi(u) = \phi(\ell^q,\ell^p) - \lim\limits_{n\to\infty} J_\phi(u_n)$ dir.//

Pürüzsüz Banach uzaylarında $J_\phi$ operatörü normun gradyanı olarak ortaya çıkmaktadır [Asplund, 2]. Bu teorem refleksif olmayan uzaylar için de doğrudur.

TEOREM II.1.2- $(E, \|\ \|)$ düali kesin-konveks olan bir pürüzsüz Banach uzayı olsun. Bu durumda, her $u\in E\setminus\{0\}$ için, $J_\phi(u_o) = \phi(\|u_o\|)\cdot$ $\cdot$grad $\|u_o\|$ dır.

İSPAT: Her $r\in R_+$ için, $\Phi(r) = \int_o^r \phi(s)ds$ alalım. Her $u\in E$ için

$$\Phi(\|u\|) = \int_o^{\|u\|} \phi(s)ds.$$

dir. O halde,

$$\Phi(\|u\|) - \Phi(\|u_o\|) = \int_o^{\|u\|} \phi(s)ds - \int_o^{\|u_o\|} \phi(s)ds$$

dir. Eğer $\|u\| \geq \|u_o\|$ ise, $\phi$ artan bir fonksiyon olduğu için,

$$\Phi(\|u\|) - \Phi(\|u_o\|) = \int_{\|u_o\|}^{\|u\|} \phi(s)ds \geq (\|u\| - \|u_o\|)\phi(\|u_o\|)$$

dir. Eğer $\|u\| \geq \|u_o\|$ ise, $\|u\| - \|u_o\| \leq 0$ dir ve

$$\Phi(\|u\|)-\Phi(\|u_o\|) = -\int_{\|u\|}^{\|u_o\|} \phi(s)ds \geq (\|u\|-\|u_o\|)\ (\|u\|) \geq$$

$$\geq (\|u\|-\|u_o\|)\phi(\|u_o\|)$$

dır. O halde, her $u \in E$ için,

$$\Phi(\|u\|) - \Phi(\|u_o\|) \geq (\|u\|-\|u_o\|)\ \phi(\|u_o\|) \qquad (I)$$

dir. Diğer taraftan,

$$<J_\phi(u_o), u-u_o>_{E',E} = <J\ (u_o), u>_{E',E} - <J\ (u_o), u_o>_{E',E} \leq$$

$$\leq \phi(\|u_o\|)\|u\| - \phi(\|u_o\|)\|u_o\| = (\|u\|-\|u_o\|)\phi(\|u_o\|) \qquad (II)$$

dir. (I) ve (II) den,

$$\Phi(\|u\|) - \Phi(\|u_o\|) \geq\ J_\phi(u_o),\ u-u_o>_{E',E}$$

olduğunu buluruz. Bu bağıntı ise, alt-gradyanın tanımı (Tanım I.2.6) gereği,

$$J_\phi(u_o) \in \partial\Phi(\|u_o\|) \qquad (III)$$

demektir. Şimdi, $\Phi(\|u\|)$ nın Gâteaux-türevli olduğunu görelim. $t \in R$, $t \neq 0$ olsun. $\|u_o\|$ ve $\|u_o + tu\|$ arasında bir $c_t$ sayısı için,

$$\frac{\Phi(\|u_o+tu\|)-\Phi(\|u_o\|)}{t} = \frac{1}{t}\int_{\|u_o\|}^{\|u_o+tu\|} \phi(s)ds = \frac{\|u_o+tu\|-\|u_o\|}{t}\ \phi(c_t)$$

dir. $t \to 0$ zaman, $\|u_o + tu\| \to \|u_o\|$ ve, $\phi$ sürekli olduğu için, $\phi(c_t) \to \phi(\|u_o\|)$ dır. Uzayımız pürüzsüz olduğu için, Teorem I.1.3'e göre, uzayın normu $u_o$ da Gâteaux türevlidir ve

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\Phi(||u_o\ tu||) - \Phi(||u_o||)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{||u_o\ tu||-||u_o||}{t}\ \phi(C_t)$$

$$= \phi(||u_o||)\ \text{grad}\ ||u_o||$$

dır. O halde $\Phi(||u||)$ Gâteaux-türevli ve Gâteaux türevi, $u_o$ da, $\phi(||u_o||)$ grad $||u_o||$ dır. Buradan da, (III) e ve Teorem I.2.3'e göre,

$$J_\phi(u_o) = \phi(||u_o||)\ \text{grad}\ ||u_o||$$

olduğunu buluruz.//

ÖRNEK: $\Omega \subset R^n$ bir açık küme, $1<p<\infty$, $m\in N$ ve $E = W^{m,p}(\Omega)$, Sobolev uzayı olsun. Bu uzay düzgün-konveks ve pürüzsüzdür. Ayrıca, herhangi bir ölçüm uzayı $(S, A, \mu)$ için, $(L^p_\mu(S), ||\ ||_p)$ pürüzsüz bir uzaydır ve, $u_o \in L^p(S)$, $u_o \neq 0$ için, grad $||u_o||_p = ||u_o||_p^{1-p} \times |u_o|^{p-2} u_o$ dır. Gerek bu bağıntıdan, gerek doğrudan doğruya veya Önerme II.1.3'ün koşullarının sağlandığı gösterilerek, $u_o \in W^{m,p}(\Omega)$, $u_o \neq 0$ için,

$$J_\phi(u_o) = \phi(||u||_{m,p})||u||_{m,p}^{1-p} \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(|D\ u|^{p-2} D^\alpha u)$$

olduğunu görürüz.

## KISIM II.2- REFLEKSİF BANACH UZAYLARINDA T-İZDÜŞÜM

Bu kısımda $(E, ||\ ||)$ bir refleksif Banach uzayı ve $K \subseteq E$ da bir konveks kapalı küme olacaktır. İfadelerde sadelik sağlamak için K kümesinin sıfırı içerdiğini varsayacağız. Her $u\in E$ için, $P_K u$ ile u nın K üzerine metrik izdüşümünü $(||u-p_K u|| = \inf_{v\in K} ||u-v||)$ göstereceğiz.

Bilindiği gibi, eğer $(H, <>)$ bir gerçel Hilbert uzayı, $K\subseteq H$ bir kapalı konveks küme ve $u\in H$ ise, $p_K u$ aşağıdaki varyasyonel eşitsizlik ile de tanımlanabilir: Eğer $W_u \in K$ ve

$\forall v \in K, \langle W_u - u, W_u - v \rangle \geq 0$

ise, $W_u = p_K u$ dır.

Bu kısımda gayemiz, kesin-monoton, h-sürekli, sınırlı [Tanım II.1.2] koersif [bu terim ileride tanımlanacaktır] ve $T(o) = 0$ olan bir $T: E \to E'$ operatörü verildiğinde,

1) Her $u \in E$ için, bir ve bir tek, $k_u \in K$ nın

$$(\mathrm{I}) \qquad \forall v \in K, \langle T(k_u - u), k_u - v \rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliğini sağladığını göstermek;

2) $u \in E \to k_u \in K$ operatörünün klasik izdüşüm operatörü, $u \in E \to p_K u \in K$ nın özelliklerine benzer özelliklere sahip olduğunu ispatlamak ve

3) $u \in E \to T(k_u - u) \in E'$ operatörünün özelliklerini incelemektir. Ayrıca, $T = J_\phi$ hali incelenmiş ve bu durumda, (I) varyasyonel eşitsizliği ile tanımlanan $k_u$ nun $p_K u$ olduğu gözlenmiştir.

Yukarıda belirtilen özelliklere sahip bir $T: E \to E'$ operatörüne 'izdüşüren' ve $k_u$ ya da 'u nın K üzerine T-izdüşümü' adları verilmiştir. T-izdüşüm kavramı oldukça genel bir kavramdır; T-izdüşümü tanımlayabilmemiz için üzerinde çalıştığımız uzayın normlu bir uzay olması şart değildir. Bu kısımda normlu uzaylar çerçevesinde yapılanlar yerel konveks refleksif topolojik vektör uzayları için de yapılabilir. Ancak, gerçeklerden uzaklaşmamak ve tümüyle varsayımlar üzerine kurulu bir çerçevede çalışmak durumunda kalmamak için, normlu uzaylarda çalışmak yeğlenmiştir.

Bu kısımda, özet olarak, izdüşüm kavramı genelleştirilmiş ve bu kavramın temel özellikleri incelenmiştir.

<u>TANIM II.2.1</u>- $T: E \to E'$ bir operatör olsun. Eğer, aşağıdaki iki koşul

$ID_1$- T kesin-monoton, h-sürekli, sınırlı ve $T(o) = 0$ dır.

$ID_2$- T koersiftir: $R_+$ üzerinde tanımlı, her $[o,a]$ aralığı

üzerinde sınırlı kalan öyle bir $\alpha: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu vardır ki, $u \in E$ sabit tutulduğu zaman, $v \in E$ ve $||v|| > \alpha(||u||)$ için,
$\langle T(v-u), v\rangle_{E',E} > 0$ dir

sağlanıyor ise, T operatörüne bir "izdüşüren operatör", [veya, kısaca İD-operatörü], diyeceğiz.

ÖRNEKLER: 1) $(E, ||\ ||)$ kendisi ve düali kesin-konveks olan bir Banach uzayı olsun [Teorem I.1.1'e bakınız]. Bu durumda, her düalite operatörü $J_\phi$ bir İD-operatörüdür. Zira, $J_\phi$ nin $ID_1$ koşulunu sağladığı Önerme II.1.4, II.1.5 ve II.1.6'da görülmüştür. $ID_2$ koşuluna gelince,

$$\langle J_\phi(v-u), v\rangle_{E',E} = \langle J_\phi(v-u), v-u\rangle_{E',E} + \langle J_\phi(v-u), u\rangle_{E',E} \geq$$

$$\geq \phi(||v-u||)||v-u|| - \phi(||v-u||)||u|| \geq \phi(||v-u||)(||v|| - 2||u||)$$

eşitsizliğinden, $||v|| > 2||u||$ için, $\langle J_\phi(v-u), v\rangle > 0$ olduğunu görüyoruz. O halde, $\alpha(t) = 2t$ almak yetecektir.

2- $(H, \langle\rangle)$ bir gerçel Hilbert uzayı, $T: H \to H'$ herhangi bir sınırlı, kuvvetli pozitif olan $(\langle T(u), u\rangle \geq c\, ||u||^2,\ c>0)$ linear operatör olsun. T nin $ID_1$ koşulunu sağladığı açıktır. $ID_2$ koşuluna gelince,

$$\langle T(v-u), v\rangle = \langle T(v-u), v-u\rangle + \langle T(v-u), u\rangle \geq$$

$$\geq c||v-u||^2 - ||T||\ ||v-u||\ ||u|| \geq ||v-u||(c||v|| + c||u|| -$$

$$- ||T||\,||u||) = ||v-u||\ c(||v|| - \frac{c-||T||}{c}||u||)$$

eşitsizliğinden, $||v|| > \frac{c-||T||}{c}||u||$ olduğu zaman $\langle T(v-u), v\rangle > 0$ olduğunu görüyoruz. O halde, $\alpha(t) = \frac{c-||T||}{c}t$ almak yetecektir.//

İlk teoremimiz T-izdüşümün varlığı üzerinedir.

TEOREM II.2.1- $T: E \to E'$ bir İD-operatörü ve $u \in E$ verilmiş bir eleman, olsunlar. Bu durumda, öyle bir, ve bir tek, $k_u \in K$ vardır ki, bu $k_u$ için

$$I(u): \forall\ v\in K,\ \langle T(k_u-u),\ k_u-v\rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, eğer $u\in K$ ise, $k_u=u$ dır.

İSPAT: Her $v\in K$ için, $A(v) = T(v-u)$ koyalım. Gayemiz A operatörüne Teorem I.2.1 in uygulanabileceğini göstermektir. O halde, A nın söz konusu teoremin varsayımlarını sağladığını gösterelim.

a) $A: K\to E'$ kesin-monotondur: $v_1,\ v_2\in K,\ v_1 \neq v_2$ olsun.

$$\langle A(v_1)-A(v_2),\ v_1-v_2\rangle_{E',E} = \langle T(v_1-u)-T(v_2-u),\ v_1-u),\ v_1-u-(v_2-u)\rangle_{E',E} > 0$$

dir. Zira, T kesin-monotondur.

b) $A: K\to E'$ h-süreklidir: $v_1,\ v_2\in K$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun.

$$\langle A(tv_1+(1-t)v_2),\ v_1-v_2\rangle_{E',E} = \langle T(t(v_1-u)+(1-t)(v_2-u)),\ v_1-u-(v_2-u)\rangle_{E',E}$$

ve T h-sürekli olduğu için,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in[0,1]}} \langle A(tv_1+(1-t)v_2), v_1-v_2\rangle_{E',E} = \langle T(v_2-u), v_1-v_2\rangle_{E',E} = \langle A(v_2), v_1-v_2\rangle_{E',E}$$

dir. Bu ise, A nın h-sürekliliğinden başka birşey değildir.

A operatörü, monoton ve h-sürekli olduğu için, Önerme I.2.2 ye göre p-monoton operatörlerinin $pm_1$) koşulunu sağlar. Ayrıca, T operatörü sınırlı olduğu için, A operatörü de sınırlıdır ve dolayısıyla, A operatörü p-monoton operatörlerin $pm_2$) koşulunu da sağlar. O halde, A bir p-monoton operatördür.

Şimdi Teorem I.2.1 in ikinci koşulu (c) nin de sağlandığını görelim. Bunun için, $r_o = \alpha(||u||)$ ve $\Gamma = \{v\in K \,/\, ||v|| \leq r_o\}$ alalım. $\Gamma$ kümesi aşikâr olarak, K nın bir $\sigma(E,E')$-tıkız konveks alt kümesidir. $ID_2$) koşuluna göre, her $v\in K\setminus\Gamma$ için,

$$\langle A(v),v\rangle_{E',E} = \langle T(v-u),v\rangle_{E',E} > 0$$

dir. O halde, A operatörü Teorem I.2.1 in ikinci koşulunu da sağlamaktadır.

A operatörü Teorem I.1'in koşullarını sağladığına göre, öyle bir $k_u \in K$ vardır ki, bu $k_u$ için,

$$I(u):\ \forall v\in K,\ \langle T(k_u-u),\ k_u-v\rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliği sağlanır. Böylece $k_u$ nın varlığını göstermiş olduk. Şimdi, $k_u$ nın tekliğini gösterelim. Eğer, ikinci bir $k_o \in K$, $k_o \neq k_u$ için, I(u) eşitsizliği sağlanmış olsa idi.

$$\forall v\in K,\ \langle T(k_o-u),\ k_o-v\rangle_{E',E} \leq 0$$

olurdu. Bu son eşitsizlikte $v=k_u$ ve I(u) de de $v=k_o$ alır ve toplarsak

$$\langle T(k_u-u)-T(k_o-u), k_u-k_o\rangle_{E',E} = \langle T(k_u-u)-T(k_o-u),\ k_u-u-(k_o-u)\rangle_{E',E} \leq 0$$

buluruz. T kesin-monoton olduğu için, bu son eşitsizlik $k_u=k_o$ olmasını gerektirir ki, bu bir çelişkidir. Bu çelişkiden $k_u$ nın tek olduğunu buluruz. Eğer $u\in K$ ise, $k_u=u$ nın I(U) eşitsizliğini sağladığı açıktır. I(u) eşitsizliğini sağlayan K nın yalnızca bir elemanı olduğuna göre, bu eleman u dır; yani, $k_u = u$ dır.//

<u>UYARI 1</u>- Teorem II.2.1'in ispatında gördük ki I(u) eşitsizliğini sağlayan $k_u$ nın varlığı için T operatörünün kesin-monoton ve p-monoton olması yeterlidir. T operatörünü h-sürekli ve sınırlı almamızın nedeni, $u\to k_u$ operatörünün klasik izdüşüm operatörünün özelliklerine benzer özelliklere sahip olmasını isteyişimizdir. T nin sınırlı oluşunun $u\to k_u$ operatörün özelliklerinin incelenmesinde önemli rol oynadığını birazdan vereceğimiz teoremin ispatında göreceğiz.

2- Teorem II.2.1'in ispatında yine gördük ki, her $u\in E$ için, I(u) eşitsizliğini sağlayan $k_u \in K$ elemanı $\Gamma = \{v\in K / \|v\| \leq \alpha(\|u\|)\}$ kümesindedir. Bu özelliği $u\to k_u$ operatörünün özellikleri incelerken kullanacağız.

<u>TANIM II.2.2</u>- T: $E\to E'$ bir İD-operatörü ve $u\in E$ bir eleman, olsunlar.

$$I(u):\ \forall v\in K,\ \langle T(k_u-u),\ k_u-v\rangle_{E',E} \leq 0$$

Varyasyonel eşitsizliğini sağlayan K nın tek elemanı $k_u$ ya 'u nın K üzerine T-izdüşümü' diyeceğiz.

ÖRNEK: $(S,A,\mu)$ herhangi bir ölçüm uzayı, $E=L^p_\mu(S)$, $(1<p<+\infty)$ ve $K=\{v\in L^p(S)/v(x)\geq 0$ h.h.h $x\in S$ için$\}$ olsun. K kümesi E nin konveks ve kapılı bir alt kümesidir. Herhangi bir ID-operatörü $T:E\to E'$ alalım. Eğer, her $u\geq 0$ (h.h.h) için, $T(u)\geq 0$ (h.h.h) ise, $u\in E$ nin K üzerine T-izdüşümü $u^+$ dır ($u^+=\sup(u,0)$ dır). Zira, bir taratfan her $u\in E$ için $u^+\in K$ dır; diğer taraftan ise, $u^+-u=u^-$ ve her $v\in K$ için

$$<T(u^-),u^+-v>_{E',E}=\int_S T(u^-)u\,d\mu-\int_S T(u^-)v\,d\mu=-\int_S T(u^-)v\,d\mu\leq 0$$

dir. O halde, $u^+$ I(u) eşitsizliğini sağlamaktadır. I(u) eşitsizliği K nın yalnızca bir elemanı için sağlandığından, $k_u=u^+$ dır.//

Eğer, $(E,\|\ \|)$ bir kesin-konveks refleksif Banach uzayı ve $K\subseteq E$ konveks ve kapalı olan bir küme ise, $u\in E\to P_K u\in K$ iyi tanımlanmış bir operatördür ve bu operatör yarı-süreklidir(norm-$\sigma(E,E')$ sürekli). Aşağıdaki teorem aynı özelliğin T-izdüşüm için de doğru olduğunu göstermektedir.

TEOREM II.2.- $T:E\to E'$ herhangi bir İD-operatörü olsun. Bu durumda, $u\in E\to k_u\in K$ operatörü yarı-süreklidir.

İSPAT: $u,u_n\in E$, $\|u_n-u\|\to 0$ olsun. $(u_n)_{n\in N}$ dizisi yakınsak olduğu için sınırlıdır: Öyle bir $a\in R$ vardır ki, her $n\in N$ için $\|u_n\|\leq a$ ve $\|u\|\leq a$ dır. İD-operatörlerinin tamınımdaki $\alpha$ fonksiyonu $[0,a]$ aralığında sınırlı olduğu için, $\sup\limits_{0\leq t\leq a}\alpha(t)=b<+\infty$ dir. O halde, uyarı 2) ye göre, her $n\in N$ için,

$$k_{u_n},\ k_u\in\Gamma_o=\{v\in K/\|v\|\leq b\}$$

dir. Notasyon kolaylığı için $k_n=k_{u_n}$ koyalım. $\Gamma_o$ kümesi sınırlı olduğu için $(k_n-k_u)_{n\in N}$ dizisi sınırlı bir dizidir. Diğer taraftan, T operatöre, $ID_1$) koşulu gereği, sınırlı olduğundan, $(T(k_n-u_n))_{n\in N}$ dizisi de sınırlıdır. Şimdi, bir yandan E nin refleksif ve $\Gamma_o$ nın sınırlı olduğunu; diğer yandan ise Bourbaki-Alaoğlu teoremini kullanarak, $(k_n-u_n)_{n\in N}$ dizisinin öyle bir alt-dizisi $(k_{n_p}-u_{n_p})_{p\in N}$, ve $k_o\in K$, $f\in E'$ elemanları bulabiliriz ki,

$$f=\sigma(E',E)-\lim_{p\to\infty}T(k_{n_p}-u_{n_p})\qquad k_o=\sigma(E,E')-\lim_{p\to\infty}k_{n_p}$$

olur. Bundan sonra göstermek istediklerimiz şunlardır: i) $f=T(k_u-u)$, ii) $k_o=k_u$, ve iii) $k_u=(E,E')-\lim\limits_{n\to\infty}k_n$.

i) ve ii) nin ispatı şöyledir: $k_{n_p}$ elemanı, tanım gereği, $I(k_{n_p})$ varyasyonel eşitsizliğini sağlamaktadır:

$$I(k_{n_p}):\ \forall v\in K,\ <T(k_{n_p}-u_{n_p}),k_{n_p}-v>_{E',E}\leq 0\ \text{dır.}$$

K kümesi kapalı ve konveks olduğu için zayıf topoloji için de kapalıdır.

O halde $k_o \in K$ dır. $I(U_{n_p})$ de $v = k_o$ alırsak,

$$<T(k_{n_p} - u_{n_p}) \,,\, k_{n_p} - k_o>_{E',E} \leq 0 \quad (I)$$

buluruz. Ayrıca, $(T(k_{n_p} - u_{n_p}))_{p\in IN}$ dizisi sınırlı ve $\|u_{n_p}-u\| \to 0$ olduğu için,

$$\lim_{p} < T(k_{n_p}-u_{n_p}), u_{n_p}-u>_{E',E} = 0 \quad (II)$$

dir. (I) göre,

$$<T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,,\, k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} = <T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,,\, k_{n_p}-k_o>_{E',E} +$$

$$+ <T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,,\, k_o-u>_{E',E} + <T(k_{n_p}-u_{n_p}), u-u_{n_p}>_{E',E} \leq$$

$$\leq <T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,,\, k_o-u>_{E',E} + <T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,,\, u-u_{n_p}>_{E',E} \quad (III)$$

dir. Şimdi (III) de limsup'e geçer ve (II) yi kullanırsak,

$$\limsup_{p} <T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} \leq \limsup_{p} <T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_o-u>_{E',E} +$$

$$+ \lim_{p} <T(k_{n_p}-u_{n_p}), u-u_{n_p}>_{E',E} = \limsup_{p} <T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_o-u> =<f,k_o-u>_{E',E}$$

olduğunu, yani

$$\lim\sup < T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} \leq <f, k_o-u>_{E',E} \quad (IV)$$

olduğunu buluruz. T operatörü monoton ve h-sürekli olduğu için, Önerme I.2.2/1'den,

$$f = T(k_o-u) \quad (V)$$

olduğunu buluruz. Şimdi, T nin monotonluğunu kullanarak,

$$<T(k_{n_p}-u_{n_p}) - T(k_o-u) \,,\, k_{n_p}-u_{n_p}-(k_o-u)>_{E',E} \geq 0$$

olduğunu görürüz. Bu ifadeyi açar, limite geçer ve (V) kullanırsak,

$$<T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,, k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} \geq <T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_o-u>_{E',E} +$$

$$+ <T(k_o-u), k_{n_p}-u_{n_p}-(k_o-u)>_{E',E}$$

ve,

$$\liminf < T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} \geq <T(k_o-u), k_o-u>_{E',E}$$

buluruz. (IV) ve (V) gözönünde tutarak, bu son eşitsizlikten,

$$\lim_p < T(k_{n_p}-u_{n_p}) \,, k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} = <T(k_o-u), k_o-u>_{E',E} \qquad \text{(VI)}$$

olduğunu buluruz. Şimdi, $v \in K$ olsun,

$$<T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-v>_{E',E} = <T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-u_{n_p}> + <T(k_{n_p}-u_{n_p}), u_{n_p}-v>_{E',E}$$

ve

$$<T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-v>_{E',E} \leq 0$$

olduğu için, (VI) dan

$$\lim < T(k_{n_p}-u_{n_p}), k_{n_p}-u_{n_p}>_{E',E} + \lim < T(k_{n_p}-u_{n_p}), u_{n_p}-v>_{E',E} \leq 0$$

yani

$$<T(k_o-u), k_o-u>_{E',E} + <T(k_o-u), u-v>_{E',E} = <T(k_o-u), k_o-v>_{E',E} \leq 0$$

dir. Bu ise, $k_u$ nın tanımı gereği $k_o = k_u$ demektir. Böylece, $f = T(k_u-u)$ ve $k_o = k_u$ olduklarını göstermiş olduk. Şimdi de, yalnız $(k_{n_p})_{p\in IN}$ alt-dizisinin değil, bütün $(k_n)_{n\in IN}$ dizisinin $k_u$ ya $\sigma(E,E')$-yakınsadığını gösterelim. Bunu göstermek için, $\Gamma_o$ kümesini $\sigma(E,E')$-tıkız ve $\{k_n/n\in IN\} \subseteq \Gamma_o$ olduğu için, Teorem II.1.1'e göre, $k_u$ nın $(k_n)_{n\in IN}$ dizisinin $\sigma(E,E')$-topolojisi için, tek limit noktası olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu ise T-izdüşüm tek oluşunun bir sonucudur. Zira, $(k_n)_{n\in IN}$ yerini bunun herhangi bir alt dizi ile çalışır ve yukarıda yaptıklarımızı tekrarlarsak, bu alt-dizinin bir alt-dizisinin $k_u$ ya $\sigma(E,E')$-yakınsadığını buluruz. O halde, $k_u$, $(k_n)_{n\in IN}$ nın, zayıf topoloji için, tek limit noktasıdır ve $k_u = \sigma(E,E')\text{-}\lim_{n\to\infty} k_n$ dır.//

Eğer, K kümesi, norm-topoloji için, yerel tıkız ise, $u \in E \to p_K u$ operatörü süreklidir. [Göthe, I, s: 344]. Aynı özellik, $u \to k_u$ operatörü için de doğrudur.

ÖNERME II.2.1- Eğer, K kümesi, norm-topoloji için, yerel tıkız ise, $u \in E \to k_u \in K$ operatörü süreklidir.

İSPAT: $u_n$, $u \in E$ ve $\|u_n - u\| \to 0$ olsun. Teorem II.2.2'nin notasyonları ile, $k_{u_n}$, $k_u \in \Gamma_o$ dır. $\Gamma_o = \{v \in K \,/\, \|v\| \leq b\} = K \cap B_b(E)$, burada $B_b(E) = \{u \in E / \|u\| \leq b\}$ dir. K kümesi yerel-tıkız olduğu için $\Gamma_o$ kümesi norm-topoloji için tıkızdır. O halde, $(k_{u_n})_{n \in IN}$ dizisinin yakınsak bir alt-dizisi vardır. Bu alt dizinin limiti $k_u$ olmak zorundadır. Zira, Teorem II.2.2'ye göre, $k_u = \sigma(E,E')\text{-lim}\, k_{u_n}$ dir. Bu ise $k_u$ nın $(k_{u_n})_{n \in IN}$ dizisinin norm-topoloji için tek limit noktası olduğunu göstermektedir. O halde, Teorem II.1.1'e göre, $\|k_{u_n} - k_u\| \to 0$ dır.//

Teorem II.2.2'nin ispatını yaparken aynı zamanda aşağıdaki önermeyi de ıspatladık.

ÖNERME II.2.2- $u \in E \to T(k_u - u) \in E'$ operatörü norm-$\sigma(E',E)$ süreklidir.//

UYARI: E den E' ne norm-$\sigma(E',E)$-sürekli olan her operatörün h-sürekli olduğu açıktır. O halde $u \to T(k_u - u)$ h-süreklidir.//

Eğer $(H, \langle\rangle)$ bir Hilbert uzayı ise, $u \in H \to u - p_K u \in H$ operatörü monotondur: $\langle u - p_K u - (v - p_K v), u - v\rangle \geq 0$ dir. Bu özellik $u \in E \to T(k_u - u) \in E'$ için de doğrudur.

ÖNERME II.2.3- $u \in E \to \beta(u) = -T(k_u - u) \in E'$ operatörü monoton ve sınırlıdır. Ayrıca, her $u \in E$ için, $\langle \beta(u), u\rangle_{E',E} \geq 0$ ; her $u \in E \setminus K$ için, $\langle \beta(u), u\rangle_{E',E} > 0$ ; ve $\beta(u) = 0$

yalnız ve yalnız $u \in K$ içindir.

İSPAT: $u, v \in E$ olsun. $k_u$ ve $k_v$ nin tanımları gereği,

$$I(u): \forall w \in K,\ \langle T(k_u - u), k_u - w\rangle_{E',E} \leq 0$$

ve

$$I(v) : \forall w \in K, \quad \langle T(k_v-v),\ k_v-w\rangle_{E',E} \leq 0$$

dir. I(u) da $w = k_v$ ve I(v) de de $w = k_u$ alıp toplarsak,

$$\langle T(k_u-u) - T(k_v-v),\ k_u-k_v\rangle_{E',E} \leq 0 \qquad (I)$$

buluruz. Diğer taraftan, T monoton olduğu için,

$$\langle T(k_u-u) - T(k_v-v),\ k_u-u-(k_v-v)\rangle_{E',E} \geq 0 \quad (II)$$

dir. (I) ve (II) yi toplayarak

$$\langle T(k_u-u) - T(k_v-v),\ v-u\rangle_{E',E} \geq 0$$

Yani,

$$\langle \beta(u)-\beta(v),\ u-v\rangle_{E',E} \geq 0$$

buluruz ki, bu da $\beta$ nın monoton olduğunu göstermektedir.

$\beta$ sınırlıdır, zira, u sınırlı bir kümede değişirken, Teorem II.2.2'nin ispatında gördük ki $k_u$ da sınırlı bir kümede değişmektedir. O halde, T sınırlı olduğu için, $\beta$ sınırlıdır.

$v = 0$ için $k_v = 0$ dır. Zira $0 \in K$ ve $T(0) = 0$ dır. O halde, T nın monotonluğundan,

$$\forall u \in E, \ \langle \beta(u),\ u\rangle_{E',E} \geq 0$$

dir.

Eğer $u \in E \setminus K$ ise, $k_u \neq u$ ve $k_u-u \neq 0$ dır. T kesin-monoton olduğundan,

$$\langle T(k_u-u),\ k_u-u\rangle_{E',E} > 0 \qquad (III)$$

dir. Diğer yandan, I(u) de $w = 0$ alırsak,

$$\langle T(k_u.u),\ k_u\rangle_{E',E} \leq 0 \qquad (IV)$$

buluruz. (III) ve (IV) toplayarak,

$$<\beta(u),\ u>_{E',E} > 0 \qquad (V)$$

olduğunu buluruz.

Eğer $u \in K$ ise, $k_u = u$ ve $\beta(u) = 0$ dır. Karşıt olarak, eğer $u \in E$ ve $\beta(u) = 0$ ise, $<\beta(u), u>_{E',E} = 0$ dır. Bu ise, (V) göre ancak $u \in K$ için mümkündür.//

## $T = J_\phi$ HÂLİ

Tanım II.2.1'den sonra verilen örnekte her dualite operatörü $J_\phi$ nin bir ID-operatörü olduğu gördük. O halde, her $u \in E$ için, u nın K üzerine $J_\phi$-izdüşümünden söz edebiliriz. Aşağıdaki teorem u nın K üzerine $J_\phi$-izdüşümünün $p_K u$ olduğu söylemektedir. Bu beklenmedik bir sonuç değildir. Zira bu durumda, E'nin normu Gâteaux türevlidir. (Teorem I.1.3 ve I.1.4) ve $J_\phi(u) = \phi(||u||)$ grad $||u||$ dır.||

TEOREM II.2.3- $(E, ||\ ||)$ kendisi ve düali kesin-konveks olan bir refleksif Banach uzayı ve $J_\phi$ de bir düalite operatörü olsun. Bu durumda, her $u \in E$ için, u nın K üzerine $J_\phi$-izdüşümü $p_K u$ dır.

İSPAT: Önce, $(E, ||\ ||)$ kesin-konveks olduğu için, $p_K u$ nın aşağıdaki eşitsizliği

$$\forall\, v \in K,\ ||p_K u - u|| \leq ||v-u|| \qquad (I)$$

sağlayan K nın tek elemanı olduğunu belirtelim. K kümesi konveks olduğu için, her $v \in K$ ve $0 \leq t \leq 1$ için, $t\,v + (1-t)p_K u \in K$ dır. (I) de v yerine bu elemanı koyarsak,

$$\forall\, v \in K,\ ||p_K u-u|| \leq ||tv + (1-t)p_K u-u|| \qquad (II)$$

buluruz. Diğer taraftan, $r \in R_+$ için,

$$\Phi(r) = \int_0^r \phi(s)ds$$

alalım. Teorem II.1.2'nin ispatında gördüğümüz gibi, her $v \in K$ için

$$\Phi(\|p_K u-u\|)-\Phi(\|tv+(1-t)p_K u-u\|) \geq t < J_\phi(p_K u-u),\ p_K u-v>_{E',E} \qquad (III)$$

dir. $\phi$ fonksiyonu positif olduğu için, $\Phi$ fonksiyonu bir artan fonksiyondur. O halde, (II) den,

$$\Phi(\|p_K u-u\|) - \Phi(\|t\ v\ +(1-t)p_K-u\|) \leq 0$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu son eşitsizlik ile (III) karşılaştırarak,

$$\forall\ v \in K\ ,\ < J_\phi(p_k u-u),\ p_K u-v>_{E',E} \leq 0$$

olduğunu buluruz ki, bu da $p_K u$ nın u nın K üzerine $J_\phi$-izdüşümü demektir.//

$u \to p_K u$ operatörünün sürekliliği ile ilgili aşağıdaki önermeyi burada vermeyi uygun bulduk.

<u>ÖNERME II.2.4</u>- Eğer $(E,\|\ \|)$ bir yerel düzgün-konveks Banach uzayı ise, $u \longrightarrow p_K u$ operatörü $(E,\|\ \|)$ den $(E,\|\ \|)$ ye süreklidir.

<u>İSPAT</u>: $u_n, u \in E$ ve $\|u_n-u\| \to 0$ olsun. Teorem II.2.2'ye göre, $p_K u = \sigma(E',E)-p_K u_n$ dir. Uzayımız yerel düzgün-konveks olduğuna göre, $\|p_K u_n-p_K u\| \to 0$ olduğunu göstermek için, $\|p_K u_n\| \to \|p_K u\|$ olduğunu göstermek yeterlidir. $p_K u_n$ nin tanımı gereği,

$$\forall\ v \in K\ ,\quad \|p_K u_n-u_n\| \leq \|v-u_n\|$$

dır. Bu eşitsizlikte $v = p_K u$ alırsak,

$$\|p_K u_n-u_n\| \leq \|p_K u-u_n\|$$

buluruz. O halde,

$$\|p_K u-u\| \leq \liminf\|p_K u_n-u_n\| \leq \limsup\|p_K u_n-u_n\| \leq \limsup\|p_K u-u_n\| = \|p_K u-u\|$$

ve

$$\|p_K u-u\| = \lim\|p_K u_n-u_n\| \qquad (I)$$

dir. $p_K u-u = \sigma(E,E')-\lim(p_K u_n-u_n)$ ve uzayımız yerel düzgün-konveks olduğu için,

$$||p_K u_n - u_n - (p_K u - u)|| \to 0$$

dır. O halde, $||u_n - u|| \to 0$ olduğundan,

$$||p_K u_n - p_K u|| \to 0$$

dır.//

Aşağıdaki önerme yukarıda ispatını verdiğimiz önermenin doğal bir devamıdır.

ÖNERME II.2.5- Eğer $(E, ||\ ||)$ nin kendisi ve düali yerel düzgün-konveks iseler, $u \in E \to J_\phi(p_K u - u)$ operatörü $(E, ||\ ||)$ den $(E', ||\ ||')$ ne süreklidir.

İSPAT: $u_n, u \in E$ ve $||u_n - u|| \to 0$ olsun. Önerme II.2.2'ye göre, $u \in E \to J_\phi(p_K u - u) \in E'$ operatörü norm-$\sigma(E', E)$ süreklidir. Diğer taraftan, $||J_\phi(p_K u_n - u_n)||' = \phi(||p_K u_n - u_n||)$ ve $\phi$ sürekli olduğundan, Önerme II.2.4'e göre,

$$\phi(||p_K u_n - u_n||) \to \phi(||p_K u - u||) = ||J(p_K u - u)||'$$

dir. O halde, E' yerel düzgün-konveks olduğu için,

$$||J_\phi(p_K u_n - u_n) - J_\phi(p_K u - u)||' \to 0$$

dır.//

ÖRNEK: 1) $L^p$ ve Sobolev uzayları $W^{m,p}(\Omega)$ $(1<p<+\infty)$ düzgün-konveks uzaylardır. O halde, bu uzaylarda $u \to p_K u$ operatörü süreklidir.

2) $L^p$ ve Sobolev uzayları $W^{m,p}(\Omega)$ $(1<p<+\infty)$ düzgün-pürüzsüz ve refleksif olduğu için bu uzayların düalleri de, Teorem I.1.10'a göre, düzgün konvekstirler. O halde, bu uzaylarda $u \to J_\phi(u - p_K u)$ operatörü süreklidir.//

# BÖLÜM III: LİNEER OLMAYAN DENKLEM VE VARYASYONEL EŞİTSİZLİKLER İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Bu bölüm iki kısıma ayrılmıştır:

KISIM III-1: $\tilde{M}$-tipi operatörler ile verilmiş varyasyonel eşitsizliklerin çözümünün varlığı üzerine.

KISIM III-2: $A(u) = f$ denkleminin çözümünün varlığı üzerine bazı sonuçlar,

başlıklarını taşımaktadır. Kısım III-1 de $\tilde{M}$-tipi bir operatöre bağlı olarak verilmiş bir varyasyonel eşitsizliğinin çözümünün varlığı gösterilmekte; Kısım III-2 de ise, çeşitli varsayımlar altında, $A(u) = 0$, $A(u) = J(u)$ ve $A(u) = u$ denklemlerinin çözümünün varlığı incelenmektedir. Her kısımın girişinde o kısımın gayesi ve o kısımda yapılanlar özetlenmiş olduğundan, burada bu kısa giriş ile yetinilmiştir.

## KISIM III-1: $\tilde{M}$-TİPİ OPERATÖRLER İLE VERİLMİŞ VARYASYONEL EŞİTSİZLİKLERİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI ÜZERİNE

Kısım III-1 Bölüm II nin bir uygulamasıdır. Verilerimiz: $(E, \|\ \|)$ bir refleksif Banach uzayı, $A:E \to E'$ bir $\tilde{M}$-tipi operatör [$\tilde{M}$-tipi operatörlerin tanımı aşağıda verilmiştir], $K \subseteq E$ bir konveks, kapalı küme ve $f \in E'$ verilmiş bir eleman'dır. Gayemiz: En az bir $u \in K$ nın

$$\text{(I)} \quad \forall\ v \in K, \langle A(u)-f,\ u-v\rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliğini sağladığını göstermektir. Brezis, [Bresis, I] de bu tip operatörler için $A(u) = f$ denklemini sağlayan $u \in E$ ların varlığını göstermiştir. Ancak, $\tilde{M}$-tipi bir A operatörüne bağlı olarak verilen (I) varyasyonel eşitsizliğinin çözümünün varlığı henüz, bildiğim kadarı ile gösterilmiş değildir. Burada yapılanlar, bir ölçüde, bu boşluğu doldurmaya yönęliktir.

TANIM III-1: $A:E \to E'$ bir operatör olsun. Eğer, aşağıdaki iki koşul:

$M_1$) Eğer, her sınırlı ve $\sigma(E,E')$-yakınsak $(u_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq E$ ağı için, $u = \sigma(E,E')\text{-}\lim\limits_{\alpha\, I} u_\alpha$, $f = \sigma(E',E)\text{-}\lim\limits_{\alpha\, I} A(u_\alpha)$ ve $\limsup\limits_{\alpha} < A(u_\alpha), u_\alpha>_{E',E} \leq < f,u>_{E',E}$ ise, $A(u) = f$ ve $\lim\limits_{\alpha\, I} < A(u_\alpha),u_\alpha>_{E',E} = <A(u),u>_{E',E}$ dır.

$M_2$) E nin her sonlu-boyutlu alt uzayı F için, $A_{\restriction F}:F \to (E', \sigma(E',E))$ süreklidir.

sağlanıyor ise, A ya bir '$\tilde{M}$-tipi' operatördür, diyeceğiz.

UYARI: Bu tanım ile tanımlanan $\tilde{M}$-tipi operatörler ile Brezis'in [Brezis, I, s.123] Tanım-E ile verdiği M-tipi operatörler arasındaki terk fark, burada, $M_1$) koşulunun sonucuna $\lim\limits_{\alpha\in I} < A(u_\alpha),u_\alpha>_{E',E} = <A(u),u>_{E',E}$ eşitliğinin eklenmiş olmasıdır. Aşağıdaki örneklerde de göreceğimiz gibi, Brezis'in M-tipi operatörler için verdiği örnekler, aynı zamanda, $\tilde{M}$-tipi operatörlere de örnektir.

ÖRNEKLER: $1^o$/ Her monoton, h-sürekli operatör $A:E \to E'$ bir $\tilde{M}$-tipi operatördür. Zira önerme I-2-2 ye göre, $M_2$) koşulu ve $M_1$ koşulunun $\lim\limits_{\alpha\in I} < A(u_\alpha),u_\alpha>_{E',E} = < A(u),u>_{E',E}$ eşitliği hariç, diğer sonuçları sağlanmaktadır. O halde, $M_1$ koşulunun verileri altında, $\lim <A(u_\alpha),u_\alpha>_{E',E} = <A(u),u>_{E',E}$ eşitliğinin de sağlandığını göstermemiz gerekmektedir. Bu eşitlik A nın monotonluğunun bir sonucudur:

$$<A(u_\alpha)-A(u),\ u_\alpha-u>_{E',E} \geq 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$<A(u_\alpha),u_\alpha>_{E',E} \geq < A(u_\alpha),\ u>_{E',E} + < A(u),\ u_\alpha-u>_{E',E}$$

ve

$$\liminf < A(u_\alpha),u_\alpha> \geq \liminf < A(u_\alpha),u>_{E',E} = <A(u),u>_{E',E}$$

dir. O halde, $M_1$) koşulunun varsayımlarına göre,

$$\lim < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = < A(u), u >_{E',E}$$

dir.

$2^o$/ Her p-monoton operatör $A:E \to E'$ bir $\tilde{M}$-tipi operatördür.

<u>İSPAT</u>: $M_1$): $(u_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq E$ sınırlı, $\sigma(E,E')$-yakınsak bir ağ, $u = \sigma(E,E')\lim u_\alpha$, $f = \sigma(E',E)-\lim A(u_\alpha)$ ve $\limsup < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} \leq < f,u >_{E',E}$ olsun.

$$\liminf < A(u_\alpha), u_\alpha - u >_{E',E} = \liminf \left[ < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} - \right.$$

$$\left. - < A(u_\alpha), u >_{E',E} \right] \leq \limsup < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} -$$

$$- \lim < A(u_\alpha), u >_{E',E} \leq < f,u >_{E',E} - < f,u >_{E',E} = 0$$

dır. O halde, A p-monoton olduğundan, her $v \in E$ için,

$$< A(u), u-v >_{E',E} \leq \liminf < A(u_\alpha), u_\alpha - v >_{E',E} \leq \limsup < A(u_\alpha),$$

$$u_\alpha - v >_{E',E} =$$

$$= \limsup \left[ < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} - < A(u_\alpha), v >_{E',E} \right] \leq < f, u-v >_{E',E}$$

dir. Bu eşitsizlik her $v \in E$ için geçerli olduğu için, $A(u) = f$ dir. Şimdi, yukarıdaki eşitsizlikte $v = u$ alırsak,

$$\liminf < A(u_\alpha), u_\alpha - u >_{E',E} \geq 0$$

buradan da

$$\liminf < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} \geq < A(u), u >_{E',E}$$

buluruz. O halde,

$$\lim < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = < A(u), u >_{E',E}$$

dir.

$M_2$) koşulu [Brezis, I] prop.21 rin bir sonucudur.

3) Browder ve Hess'in [Browder-Hess, I, s:251-294] de tanımladıkları 'pseudo-monotone' operatörler, $\tilde{M}$-tipi operatörlerdir [s:252 Def.1 ve s=258 prop.3].

ÖNERME III.1.1- Eğer $A:E \to E'$ bir $\tilde{M}$-tipi operatör ve $\beta:E \to E'$ bir monoton, h-sürekli, sınırlı [Tanım II.1.2] operatör ise $A + \beta$ bir $\tilde{M}$-tipi operatördür.

İSPAT: $A + \beta$ operatörünün M2) koşulunu sağladığı, önerme I.2.2 den, açıktır. O halde, $A + \beta$ nın $M_1$) koşulunu sağladığını gösterelim. Bunun için, $(u_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq E$ sınırlı, $\sigma(E,E')$-yakınsak bir ağ, $u=\sigma(E,E')\lim u_\alpha$, $f = \sigma(E',E)-\lim(A(u_\alpha) + \beta(u_\alpha))$ ve $\lim\sup\langle A(u_\alpha)+\beta(u_\alpha), u_\alpha\rangle_{E',E} \leq \langle f,u\rangle_{E',E}$ olsun. $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağı sınırlı ve $\beta$ operatörü de sınırlı olduğundan, $(\beta(u_\alpha))_{\alpha\in I}$ ağı $E'$ nin bir sınırlı ağıdır. O halde, Alaoğlu-Bourbaki teoremine göre, bu ağın, yine aynı notasyon ile göstereceğimiz, $\sigma(E',E)$ yakınsak bir alt ağı vardır.

$$\chi = \sigma(E',E) - \lim (u_\alpha) \qquad \text{(I)}$$

olsun. Şimdi

$$\lim\sup \langle A(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E} \leq \langle f-\chi,u\rangle_{E',E}$$

olduğunu gösterelim. Önce, $\lim\sup \langle A(u_\alpha) + \beta(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E,E} \leq \langle f,u\rangle_{E',E}$ eşitsizliğinden ve $(\beta(u_\alpha))_{\alpha\in I}$ ve $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ ağlarının sınırlı oluşundan, $(\langle A(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E})_{\alpha\in I}$ ağının üstten sınırlı olduğuna işaret edelim. Eğer,

$$\lim\sup \langle A(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E} > \langle f-\chi,u\rangle_{E',E} \qquad \text{(II)}$$

olmuş olsa idi, $(u_\alpha)_{\alpha\in I}$ nın, yine aynı notasyonla göstereceğimiz, bir alt ağı için,

$$\lim \langle A(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E} = a > \langle f - \chi,u\rangle_{E',E} \qquad \text{(III)}$$

olurdu. Ama, bu durumda

$$\lim\sup \langle \beta(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E} = \lim\sup[\langle A(u_\alpha)\ \beta(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E} -$$

$$-\langle A(u_\alpha),u_\alpha\rangle_{E',E}] \leq \langle f,u\rangle - a < \langle \chi,u\rangle_{E',E} \qquad \text{(IV)}$$

buluruz. Fakat, örnek 1 e göre, $\beta$ $\tilde{M}$-tipi bir operatördür. O halde,

(IV) den,

$$\beta(u) = \chi \text{ ve } \lim < \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = < \beta(u), u >_{E',E}$$

dir. Bu eşitliklerden de

$$\limsup < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = \limsup \left[ < A(u_\alpha) + \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} - \right.$$

$$\left. - < \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} \right] = \limsup < A(u_\alpha) + \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} -$$

$$< \beta(u), u >_{E',E} \leq < f - \chi, u >_{E',E}$$

buluruz ki, bu eşitsizlik (II) ile çelişmektedir. O halde,

$$\limsup < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} \leq < f - \chi, u >_{E',E}$$

dir. A bir M-tipi operatör olduğu için,

$$A(u) = f - \chi \quad \text{ve} \lim < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = < A(u), u >_{E',E} \tag{V}$$

dir. Şimdi, tekrar $\beta$ ya dönersek, (IV) de olduğu gibi,

$$\limsup < \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = \limsup \left[ < A(u_\alpha) + \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} - \right.$$

$$\left. - < A(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} \right] \leq < f, u >_{E',E} - < A(u), u >_{E',E} =$$

$$= < f - A(u), u >_{E',E} = < \chi, u >_{E',E}$$

ve $\beta$ bir M-tipi operatör olduğu için de,

$$\beta(u) = \chi \text{ ve } \lim < \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = < \beta(u), u >_{E',E} \tag{VI}$$

olduğunu buluruz. (V) ve (VI) dan

$$A(u) + \beta(u) = f$$

ve

$$\lim < A(u_\alpha) + \beta(u_\alpha), u_\alpha >_{E',E} = < A(u) + \beta(u), u >_{E',E}$$

olduğunu buluruz ki, bu da önermeyi ispatlar.//

Birkaç satır sonra vereceğimiz, Teorem III.1.1 in ispatında aşağıdaki önermeyi kullanacağız. Bu önerme Browder'e aittir ve ispatı [Brezis, I, s:125] de bulunabilir.

ÖNERME III.1.2- $F$ bir sonlu boyutlu Banach uzayı, $A:F \to F'$ bir sürekli operatör ve $\Gamma \subseteq F$ sıfır içeren konveks ve tıkız bir küme, öyle ki,

$$\forall\ u \in F \setminus \Gamma, \quad \langle A(u),u\rangle_{E',E} > 0$$

olsun. Bu durumda,en az bir $u_o \in \Gamma$ için, $A(u_o) = 0$ dır.//

Bu kısımın gayesi olan teorem şudur:

TEOREM III.1.1- $A:E \to E'$ bir $\tilde{M}$-tipi, sınırlı operatör ve $K \subseteq E$ sıfırı içeren konveks ve kapalı bir küme olsun. Eğer, $A$, aşağıdaki manada, ön-koersif ise,

(ÖK):"Her $f \in E'$ için, sıfırı içeren bir $\sigma(E,E')$-tıkız, konveks $\Gamma \subseteq E$ kümesi vardır. Öyle ki, her $u \in E \setminus \Gamma$ için, $\langle A(u)-f,u\rangle_{E',E} > 0$ dir".

Bu durumda, her $f \in E'$ için, en az bir $u_o \in K$

$$\forall\ v \in K, \quad \langle A(u_o) - f,\ u_o - v\rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliğini sağlar.

İSPAT: $f \in E'$ verilmiş bir eleman ve $T:E \to E'$ herhangi bir İD-operatörü olsun [Uzayımız refleksif olduğu için, Bölüm II ye göre İD-operatörleri daima vardır]. Önerme II.2.2. ve II.2.3 e göre, $\beta(u) = -T(k_u - u)$ operatörü, monoton, h-sürekli ve sınırlıdır; $A$ operatörü de $\tilde{M}$-tipi olduğu için, Önerme III.1.1 e göre her $n=1,2,3,\ldots$ için,

$$B_n : u \in E \to B_n(u) = A(u) + n\beta(u) - f \in E'$$

operatörü $\tilde{M}$-tipi bir operatördür. $\tilde{M}$-tipi operatörlerin $M_2$) koşulu gereği, $B_n$ operatörü, $E$ nin her sonlu-boyutlu alt uzayı $F$ den $(E',\sigma(E',E))$ ye süreklidir.

$\mathcal{F}$ ile $E$ nin sonlu-boyutlu alt uzaylarının kümesini gösterelim. $(\mathcal{F},\subseteq)$ çifti yönlendirilmiş bir kümedir. Her $F \in \mathcal{F}$ için,

$J_F : F \to E$ doğal gömme ve $J_F^* : E' \to F'$ de onun adjointı olsunlar. Bu linear dönüşümler E nin zayıf ve E' nin zayıf-yıldız topolojileri için süreklidirler. $\tilde{M}$-tipi operatörlerin $M_2$) koşuluna göre, $B_{n,F} = J_F^* B_n J_F$ operatörü F den F' süreklidir. Teoremin ifadesindeki (ÖK) koşuluna göre, sıfırı içeren $\sigma(E,E')$-tıkız ve konveks olan öyle bir $\Gamma$ kümesi vardır ki, her $u \in E \setminus \Gamma$ için, $\langle A(u)-f,u\rangle_{E',E} > 0$ dır. Her $F \in \mathcal{F}$ için $\Gamma_F = F \cap \Gamma$ koyalım. $\Gamma_F$, F nin sıfırı içeren tıkız ve konveks bir kümesidir. Diğer taraftan, Önerme II.2.3. e göre, her $u \in E$ için, $\langle \beta(u),u\rangle_{E',E} > 0$ dır. O halde,

$$\forall\, u \in F \setminus \Gamma_F, \quad \langle B_{n,F}(u),u\rangle_{F.F'} > 0$$

dır. O halde, Önerme III.1.2 e göre, en az bir $u_{n,F} \in \Gamma_F$ elemanı

$$B_{n,F}(u_{n,F}) = 0 \qquad \text{(I)}$$

eşitliğini sağlar. $B_n$ nin tanımına dönerek, (I) in aşağıdaki ifadeye

$$J_F^* A(u_{n,F}) + nJ_F^* \beta(u_{n,F}) = J_F(f) \qquad \text{(II)}$$

eşdeğer olduğunu görürüz. Her $F \in \mathcal{F}$ ve $n=1,2,3,\ldots$ için, $u_{n,F} \in \Gamma$ dır. $\Gamma$ kümesi $\sigma(E,E')$-tıkız olduğundan, $(u_{n,F})_{F \in \mathcal{F}}$ ağının, yine aynı notasyonla göstereceğimiz, $\sigma(E,E')$-yakınsak bir alt ağı vardır.

$$u_n = \sigma(E,E')\text{-}\lim_F u_{n,F}$$

olsun. (II) den,

$$f = \sigma(E',E)\text{-}\lim_F \left[\, J_F A(u_{n,F}) + nJ_F \beta(u_{n,F})\right] \qquad \text{(III)}$$

ve yine (II) den,

$$\langle J_F^* A(u_{n,F}) + nJ_F^* \beta(u_{n,F}),u_{n,F}\rangle_{F',F} = \langle J_F^* f,u_{n,F}\rangle_{F',F}$$

Yani,

$$\langle\, A(u_{n,F}) + n\beta(u_{n,F}),u_{n,F}\rangle_{E',E} = \langle f,u_{n,F}\rangle_{E',E}$$

buluruz. Burdan da,

$$\lim_{F \in \mathcal{F}} < A(u_{n,F}) + n\beta(u_{n,F}), u_{n,F} >_{E',E} = <f, u_n>_{E',E} \qquad \text{(IV)}$$

olduğunu buluruz. $B_n$ bir $\tilde{M}$-tipi operatör olduğu için (III) ve (IV) den,

$$A(u_n) + n\beta(u_n) = f \qquad \text{(V)}$$

eşitliğini buluruz. $(u_n)_{n \in N}$ dizisi $\Gamma$ dadır; $\Gamma$ kümesi de $\sigma(E,E')$-tıkız olduğu için, bu dizinin, yine aynı notasyon ile göstereceğimiz, $\sigma(E,E')$-yakınsak bir alt dizisi vardır.

$$u = \sigma(E,E')\text{-}\lim u_n$$

olsun. A operatörü sınırlı olduğu için, $(A(u_n))_{n \in N}$ dizisi de sınırlıdır ve

$$\lim_{n\to\infty} \beta(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (f - A(u_n)) = 0$$

olduğunu buluruz. O halde,

$$\lim\sup < \beta(u_n), u_n >_{E',E} = 0 = <0, u>_{E',E}$$

ve $\beta$, $\tilde{M}$-tipi bir operatör olduğu için de, $\beta(u) = 0$ dır. Bu ise, Önerme II.2.3. e göre, $u \in K$ olduğunu gösterir. Şimdi (V) eşitliğinin, her iki tarafını $u_n - v$, $v \in K$, ile çarparsak,

$$<A(u_n) - f, u_n - v>_{E',E} + n < \beta(u_n), u_n - v>_{E',E} = 0$$

buluruz. $v \in K$ olduğu için, Önerme II.2.3. e göre, $\beta(v) = 0$ dır; ve $\beta$ monoton olduğu için,

$$<\beta(u_n), u_n - v>_{E',E} \geq 0$$

dır. O halde,

$$\forall\, v \in K, \quad <A(u_n) - f, u_n - v>_{E',E} \leq 0 \qquad \text{(VI)}$$

dır. $(A(u_n))_{n \in N}$ dizisi sınırlı olduğu için, Alaoğlu-Bourbaki teoremine göre, bu dizinin, yine aynı notasyon ile göstereceğimiz, $\sigma(E',E)$-yakınsak bir alt ağı vardır.

$$\chi = \sigma(E',E)\text{-}\lim A(u_n)$$

olsun. (VI) eşitsizliğinde v = u alırsak, ki bunu alabiliriz, zira $u \in K$ dır,

$$<A(u_n)-f, u_n>_{E',E} \leq < A\, u_n - f,\, u>_{E',E}$$

buluruz. Bu eşitsizlikte lim sup'e geçerek

$$\limsup < A(u_n)-f, u_n>_{E',E} \leq < \chi - f, u>_{E',E}$$

olduğunu buluruz. Şimdi, A nın bir $\tilde{M}$-tipi operatör olduğunu kullanarak,

$$A(u) = \chi \quad \text{ve} \quad \lim <A(u_n), u_n>_{E',E} = < \chi, u>_{E',E} \tag{VII}$$

eşitliklerini buluruz. (VI) ya döner ve (VII) yi kullanırsak, her $v \in K$ için,

$$<A(u)-f, u-v>_{E',E} = \lim <A(u_n)-f, u_n - v>_{E',E} \leq 0$$

olduğunu buluruz. O halde, bu $u \in K$ için,

$$\forall v \in K \; < A(u)-f,\; u-v>_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliği sağlanmaktadır.//

## KISIM III.2- A(u)=f DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Burada $(X,\tau)$ herhangi bir gerçel yerel konveks Hausdorff vektör uzayı, X' de onun topolojik düali olacaktır. X sin zayıf-topolojisini $\sigma(X,X')$ ile, ve X' nün zayıf yıldız topolojisini de $\sigma(X',X)$ ile göstereceğiz. X si bir Banach uzayı olarak aldığımız zaman X yerine E harfini kullanacağız.

$D \subseteq E$ bir boş olmayan küme ve A da, $\bar{D}$ üzerinde tanımlı, $\bar{D}$ den E' ne, veya $\bar{D}$ den E ye, giden bir operatör olsun. Gayemiz, $A(u) = 0$ $(0 \in E')$, $A(u) = J_\phi(u)$ ($J_\phi$ bir düalite operatörünü göstermektedir) ve $A(u) = u$ $(u \in D)$ denklemlerinin çözümünün varlığını, çeşitli varsayımlar altında, incelemektedir. Genellikle bu tip problemlerin çözümünde D kümesi konveks seçilir [Örneğin, Brezis, Browder ve Lions'un bibliografyada verilen yapıtlarına bakınız]. Bunun nedeni ispatlarda [Browder, 4,5] de verilen sabit nokta tipi teoremlerin kullanılması ve bu teoremlerde de konveksliğin çok önemli rol oynamasıdır. Biz burada bir taraftan konveksliği kaldırırken diğer taraftan da A üzerindeki varsayımları zayıflatmaya çalıştık. Burada yapılanlar, bu tip problemlerde, konveks kümeler yerine 'bürülebilir' kümeler ile çalışabileceğimizi; ve [Browder, 4,5] de verilen sabit nokta teoremleri yerine 'topolojik derece' kavramı yardımı ile elde edilen varlık teoremlerinin kullanılabileceğini göstermektedir.

NOTASYONLAR: $D \subseteq X$ ve $F \subseteq X$ boş olmayan iki küme olsunlar. Bu kısımda kullanacağımız notasyonlar şunlardır:

$\bar{D}$ = D in, $\tau$ topolojisi için, kapanışı.

$\bar{D}$ = D nin, $\sigma(X,X')$ topolojisi, için kapanışı.

$\mathring{D}$ = D nin, $\tau$ topolojisi için, içi.

$\partial D$= D nin, $\tau$ kopolojisi için, kenarı.

$\overline{D \cap F}^{F}$ = $D \cap F$ nin F de, F ye $\tau$ nin indirgediği topoloji için, kapanışı.

$\partial_F(D \cap F)$ = $D \cap F$ nin F de, F ye $\tau$ nin indirgediği topoloji için, kenarı.

TANIM III.2.1- $D \subseteq X$ bir küme ve $u_o \in D$ bir eleman olsun. Eğer, aşağıdaki koşul,

$$\forall\ v \in X \quad \alpha > 0;\ t \in \mathbb{K},\ |t| \leq \alpha \Rightarrow t\ v + u_o \in D$$

sağlanıyor ise, D kümesi '$u_o$ da emici'dir, denir.

Eğer D kümesi açık ise, çabucak görülebileceği gibi, D her $u_o \in D$ de emicidir; karşıtı doğru değildir.

TANIM III.2.2- $D \subseteq X$ bir küme, $u_o \in D$, D $u_o$ da emici, ve $A: D \to X'$ bir operatör, olsunlar. Eğer, her $v \in X$ için

$$\lim_{t \to 0+} \langle A(u_o + tv), v \rangle_{X',X} = \langle A(u_o), v \rangle_{X',X}$$

ise, A '$u_o$ da radial-sürekli' dir, diyeceğiz.

Eğer D=X ise 'radial-süreklilik' ile 'h-süreklilik' özdeştirler. Radial süreklilik, zayıf süreklilik ($\sigma(X,X')-\sigma(X',X)$ süreklilik) ve yarı-süreklilikten çok daha zayıf bir sürekliliktir. Örneğin her linear operatör radial-süreklidir, ama zayıf sürekli değildir.

Aşağıdaki önerme Browder'e ait [Browder, 6, s:869, lemma=1] bir önermeyi genelleştirmektedir.

ÖNERME III.2.1- $D \subseteq X, u_o \in D$, $D, u_o$ da emici olan bir küme, $A: D \to X'$ $u_o$ da radial-sürekli olan bir operatör ve $f_o \in X'$ verilmiş bir eleman, olsunlar. Eğer,

$$\forall\ u \in D,\ \langle A(u) - f_o,\ u-u_o\rangle_{X',X} \geq 0 \qquad \text{(I)}$$

ise, $A(u_o) = f_o$ dır.

İSPAT: $v \in X$ alalım. $D, u_o$ da emici olduğu için, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, her $t \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq \alpha_o$ için, $u_o + tv \in D$ dir. (I) de u yerine $u_o + tv$ alırsak,

$$\langle A(u_o+tv)-f_o, tv\rangle_{X',X} \geq 0$$

ve, $t>0$ olduğu için de,

$$\langle A(u_o+tv)-f_o,\ v\rangle_{X',X} \geq 0$$

buluruz. Şimdi, A nın $u_o$ da radial sürekli olduğunu kullanırsak,

$$\langle A(u_o)-f_o,v\rangle_{X',X} = \lim_{t\to 0+} \langle A(u_o+tv)-f_o,v\rangle_{X',X} \geq 0$$

buluruz. Bu eşitsizlik her $v \in X$ için doğru olduğundan, $A(u_o)-f_o=0$ ve $A(u_o) = f_o$ dır.//

Aşağıdaki önerme Vishik'e aittir [Vishik I, lemma 3]. Bu önermede $D \subseteq \mathbb{R}^n$ de sıfırı içeren bir açık sınırlı küme ve $A: \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ bir sürekli fonksiyondur. Her $p \notin A(\partial D)$ için, $d^o[A;D,p]$ ile A nın D ye göre p de 'topolojik derece'sini göstereceğiz. Aşağıdaki ispat bu kavramı kullanmaktadır. Topolojik derece konusunda geniş bilgi [Berger,M.-Berger,M.], [Kucêra,S. et al.], [Krasnoselskii], [Smart] ve [Schwartz,J.T.] de bulunabilir. Ayrıca, bu kavramın Banach uzaylarına genelleştirilmesi konusunda geniş bilgi yukarıdaki beş eserde ve [Leray-Schauder] de bulunabilir.

ÖNERME III.2.2- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sıfırı içeren bir açık, sınırlı küme ve $A:\bar{D} \to \mathbb{R}^n$ bir sürekli fonksiyon, olsunlar. Eğer,

$$\forall\ u \in \partial D, \quad \langle A(u),u\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} > 0 \qquad \text{(I)}$$

ise, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = 0$ dır.

İSPAT: $A=(A_1,\ldots,A_n)$, $A_k:\bar{D} \to \mathbb{R}$ sürekli, $1 \le k \le n$, ve $u=(u_1,\ldots,u_n) \in \bar{D}$ olsun. Her $0 \le t \le 1$ ve $1 \le k \le n$ için,

$$A_{k,t}(u) = tu_k + (1-t)A_k(u)$$

ve

$$A_t = (A_{1,t},\ldots,A_{n,t})$$

koyalım. Her $u \in \partial D$ ve $0 \le t \le 1$ için, (I) varsayımına göre,

$$\langle A_t(u),u\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} = t\|u\|^2 + (1-t) \langle A(u),u\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} > 0$$

dir. O halde, her $u \in \partial D$ ve $0 \le t \le 1$ için, $A_t(u) \neq 0$; yani, $0 \notin A_t(\partial D)$ dır.

Topolojik derece sıfırdan geçmeyen homotopiler altında sabit olduğuna göre, her $t,t' \in [0,1]$ için,

$$d^o[A_t;D,o] = d^o[A_{t'};D.o]$$

dir. Oysa,

$$d^o[A_1;D,o] = d^o[I;D,o] = 1$$

dir. O halde,

$$d^o[A_o;D,o] = d^o[A;D,o] = 1$$

ve sonuç olarak da, topolojik derecenin özelliklerine göre, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = 0$ dır.//

Burada, geçerken, yukarıdaki önermenin ispat gerektirmeyecek kadar açık bir sonucu olan, aşağıdaki sabit nokta teoremini, yararlı olur düşüncesi ile, vermeyi uygun bulduk.

ÖNERME III.2.3- D ve A Önerme III.2. deki gibi olsunlar. Eğer aşağıdaki üç koşuldan,

a) $\forall\ u \in \partial D$, $\langle A(u),u\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} > ||u||^2$.

b) $\forall\ v \in \partial D$, $\langle A(u),u\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} > ||u||^2$.

c) $\partial D$ bağlantılı bir kümedir ve $\forall u \in \partial D$, $\langle A(u),u\rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \neq ||u||^2$.

herhangi biri sağlanıyor ise, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = u_o$ dır.//

Şimdi gayemiz Vishik'in önermesini, bir ölçüde, Banach uzaylarına genelleştirmektir. Bunu yapabilmek için aşağıdaki kavram ve özelliklere ihtiyacımız olacaktır.

TANIM III.2.3- $D \subseteq X$ bir küme olsun. Eğer, her $0 \leq \varepsilon < 1$ için, $\varepsilon\bar{D} \subseteq \overset{o}{D}$ ise D ye 'büzülebilir' (Shrinkable) bir kümedir, denir.

UYARI: 1) V.Klee [Klee, I] ye göre, 'büzülebilir küme, kavramı ilk olarak, İves,R.T. nin Ph.D. tezinde [University of Washington, Seattle, 1957] tanımlanmış ve kullanılmıştır.

2) Her büzülebilir küme sıfırın bir komşuluğudur. Ayrıca, büzülebilir kümeler sıfıra göre yıldız-kümelerdir; karşıtının doğru olmadığı açıktır.

ÖRNEKLER: 1) Eğer $D \subseteq X$ konveks ve $o \in D^o$ ise, D büzülebilir bir kümedir. Zira, her $0 \leq \varepsilon < 1$ için, $\varepsilon\bar{D}+(1-\varepsilon)\overset{o}{D} \subseteq \overset{o}{D}$ dir. Örneğin [Holmes, 2, s: 59].

2) Eğer $D_1,\ldots,D_k$ kümeleri X sin konveks alt-kümeleri ve $o \in \overset{o}{D}_k$, $1 \leq k \leq n$, ise, $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ kümesi, Örnek 1 den görülebileceği gibi (konveks olmayan), büzülebilir bir kümedir. Burada, $\bar{D} = \bar{D}^{\sigma}$ olduğuna da işaret edelim.

3) Eğer $p: X \to \mathbb{R}_+$ sürekli ve pozitif-homojen bir fonksiyon ise, $D=\{u \in X / P(u) \leq \alpha\}$ $(\alpha>0)$ kümesi büzülebilir bir kümedir.

4) Eğer, $D_1, \ldots, D_n$ kümeleri X sin büzülebilir alt kümeleri ise, $D = D_1 \cup \ldots \cup D_n$ ve $D \cap, \ldots \cap D_n$ kümeleri de, çabucak görülebileceği gibi, büzülebilir kümelerdir.//

Aşağıda vereceğimiz önerme büzülebilir kümelerin de konveks kümeler gibi düzgün (regularly) açık ve düzgün kapalı olduklarını, ve diğer bir önemli özelliğini göstermektedir.

ÖNERME III.2.4- $D \subseteq X$ bir büzülebilir küme olsun. Bu durumda,

$$1)\quad \overset{o}{D} = \bigcup_{0 \leq \varepsilon < 1} (\varepsilon \bar{D}),\quad \overset{o}{\bar{D}} = \overset{o}{D} \quad \text{ve} \quad \overline{\overset{o}{D}} = \bar{D} \quad \text{dir.}$$

ve

2) Eğer, D açık ise, X sin her sonlu-boyutlu alt uzayı F için,

$$\overline{F \cap D}^F = F \cap \bar{D} \text{ ve } \partial_F (F \cap D) = F \cap \partial D \text{ dir.}$$

İSPAT: 1) D büzülebilir bir küme olduğundan, her $0 \leq \varepsilon < 1$ için, $\varepsilon \bar{D} \subseteq \overset{o}{D}$ ve dolayısıyla, $\bigcup_{0 \leq \varepsilon < 1} (\varepsilon \bar{D}) \subseteq \overset{o}{D}$ dir. Eğer, $u \in \overset{o}{D}$ ve her $0 \leq \varepsilon < 1$ için, $u \notin \varepsilon \bar{D}$ ise, $\frac{n+1}{n} u \notin \bar{D}$ dir. $(n=1,2,3,\ldots)$. O halde, $\frac{n+1}{n} u \notin \overset{o}{D}$, yani, $\frac{n+1}{n} u \in X \setminus \overset{o}{D}$ dir. $X \setminus \overset{o}{D}$ kapalı olduğundan, $u = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} u \in X \setminus \overset{o}{D}$, yani, $u \notin \overset{o}{D}$ dir. Bu ise bir çelişkidir ve $\bigcup_{0 \leq \varepsilon < 1} \varepsilon \bar{D} = \overset{o}{D}$ dir.

Eğer D büzülebilir bir küme ise, $\bar{D}$ de büzülebilir bir kümedir, zira, $\overset{o}{D} \subseteq \overset{o}{\bar{D}}$ dir. O halde, biraz önce ispatladığımız formüle göre,

$$\overset{o}{\bar{D}} = \bigcup_{0 \leq \varepsilon < 1} (\varepsilon \bar{D}) = \overset{o}{D}$$

dir.

$\overline{\overset{o}{D}} \subseteq \bar{D}$ olduğu açıktır. Diğer yanda, D büzülebilir bir küme olduğundan, her $0 \leq \varepsilon < 1$ ve $u \in \bar{D}$ için, $\varepsilon u \in \overset{o}{D}$ dir. O halde, $u = \lim_{\varepsilon \to 1^-} \varepsilon u \in \overline{\overset{o}{D}}$, yani $\overline{\overset{o}{D}} = \bar{D}$ dir.

2) $F \subseteq X$ bir sonlu-boyutlu alt uzay olsun. Önce $F$ nin $X$ sin bir kapalı alt kümesi olduğunu belirtelim. $D \cap F$ nin $F$ de kapanışı tanım gereği,

$$\overline{D \cap F} = F \cap \overline{D \cap F}$$

dir. Oysa,

$$\overline{D \cap F} \subseteq \bar{D} \cap \bar{F} = \bar{D} \cap F$$

ve dolayısıyla,

$$\overline{F \cap D}^{F} \subseteq F \cap \bar{D}$$

dir. $u \in F \cap \bar{D}$ alalım. $D$ büzülebilir bir küme ve $F$ bir alt uzay olduğundan, her $n=1,2,3,\ldots$ için,

$$\frac{n}{n+1}\, u \in F \cap D$$

dir. Buradan da,

$$u = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}\, u \in \overline{F \cap D}^{F}$$

buluruz, zira $u \in F$ dir.

$D$ açık olduğu için, $D \cap F$, $F$ de açıktır. O halde,

$$\partial_F(D \cap F) = \overline{D \cap F}^{F} \setminus (D \cap F) = (\bar{D} \cap F) \setminus (D \cap F) = F \cap (\bar{D} \setminus D)$$

$$= F \cap \partial D$$

dir.//

TANIM III.2.4- $D \subseteq X$ bir küme ve $A: D \to X'$ bir operatör olsun. Eğer $X$ sin her sonlu-boyutlu alt uzayı $F$ için, $A$, $D \cap F$ den $(X', \sigma(X', X))$ ne sürekli ise, $A$ ya $D$ üzerinde 'sonlu-sürekli'dir, diyeceğiz.

Eğer $D = X$ ve $A$ operatörü de monoton-h sürekli ise, Önerme I.2.2. ye göre, $A$ sonlu-süreklidir. Yine bu durumda, $\tilde{M}$-tipi operatörler, tanımlarındaki $M_2)$ koşuluna göre, sonlu süreklidirler.

Radial süreklilik ile sonlu-süreklilik ilişkisi üzerine aşağıdaki önerme vardır.

<u>ÖNERME III.2.5:</u> $D \subseteq X$ kümesi her $u_o \in D$ da emici ve $A:D \to X'$ operatörü de monoton ve her $u_o \in D$ da radial-sürekli ise, A, D üzerinde sonlu-süreklidir.

<u>İSPAT:</u> F, X sin sonlu-boyutlu bir alt uzayı, $J_F : F \to X$ doğal gömme ve $J_F : X' \to F'$ onun adjointu olsunlar. Bu operatörler lineerdir ve, karşılık olarak, $\sigma(X,X')$ ve $\sigma(X',X)$ topolojileri için süreklidirler. $A_F = J_F^* A J_F$ koyalım. $A_F : D \cap F \to F'$ monoton ve radial süreklidir. Ayrıca, çabucak görülebileceği gibi, $D \cap F$ kümesi F nin her $u_o \in D \cap F$ da emici olan bir kümesidir. O halde, ispatı $X = \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $A:D \to \mathbb{R}^n$ olarak alıp yapabiliriz. Bunun için, $u_o \in D$, $u_n \in D$ ve $\|u_n - u\| \to 0$ olsun. Önce $(A(u_n))_{n \in N}$ nin $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı bir dizi olduğunu görelim. Eğer $\|A(u_n)\| \to +\infty$ olsa idi, Bolzano-Weierstrass teoremine göre, $(u_n)_{n \in N}$ bir alt dizisi $(u_{n_k})_{k \in N}$ için

$$\frac{A(u_{n_k})}{\|A(u_{n_k})\|} \to f \quad \text{ve} \quad \|f\| = 1$$

olurdu. A monoton olduğu için,

$$\forall\, v \in D,\ \langle A(u_{n_k}) - A(v),\ u_{n_k} - v \rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \geq 0 \qquad \text{(I)}$$

dir. (I) ri $A(u_{n_k})$ ile böler ve limite geçersek,

$$\forall v \in D,\ \langle f,\ u_o - v \rangle_{n,\ n} \geq 0 \qquad \text{(II)}$$

buluruz. $W \in \mathbb{R}^n$ olsun. D kümesi $u_o$-da emici olduğundan, öyle bir, $\alpha > 0$ vardır ki, $t \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq \alpha$ için, $V = u_o + tW \in D$ dir. (II) de $V = u_o + tW$ koyar ve t ye bölersek,

$$\langle f, W \rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \geq 0$$

buluruz. Bu eşitsizlik her $W \in \mathbb{R}^n$ için doğru olduğundan, $f=0$ dır. Oysa, $\|f\| = 1$ idi. Bu çelişkiden $(A(u_n))_{n \in N}$ dizisinin sınırlı olduğu çıkar. Şimdi $\|A(u_n) - A(u_o)\| \to 0$ olduğunu gösterilim. $(A(u_n))_{n \in N}$ dizisi sınırlı olduğu için, yine Bolzano-Weierstrass teoremine göre, bu dizinin yakınsak bir alt dizisi, $(A(u_{n_k}))_{k \in N'}$ vardır. $f_o = \lim_{k \to \infty} A(u_{n_k})$ olsun. (I) de bu alt diziyi alır ve limite geçersek,

$$\forall\, v \in D,\ \langle f_o - A(v),\ u_o - v \rangle_{\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n} \leq 0$$

buluruz. Bu ise, Önerme III.1.1. re göre, $A(u_o) = f_o$ olmasını gerektirir. $A(u_o) = f_o$ oluşu ise, $A(u_o)$ rın $(A(u_n))_{n \in N}$ dizisinin tek limit noktası olduğunu göstermektedir. O halde, Teorem II.1.1. re göre, $A(u_o) = \lim_{n\to\infty} A(u_n)$ ve $A$, $u_o$ da süreklidir.//

Yukarıda verilen tanım ve önermeler ile hazırlığını yaptığımız ve bir ölçüde, Vishik'in önermesinin bir genellemesi olan teorem şudur:

TEOREM III.2.1- $(E, \|\ \|)$ bir Banach uzayı, $D \subseteq E$ bir büzülebilir açık küme ve $A:\bar{D}\to E'$ monoton ve sonlu-sürekli olan bir operatör olsun. Eğer, $\bar{D}\sigma(E,E')$-tıkız ve her $u\in\partial D$ için, $\langle A(u),u\rangle_{E',E} > 0$ ise, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = 0$ dır.

İSPAT: Her $v\in D$ için, $K_v = \{u\in\bar{D}/\langle A(v),v-u\rangle_{E',E} \geq 0\}$ koyalım. $K_v$ kümesinin $\bar{D}$ nin $\sigma(E,E')$-kapalı bir alt-kümesi olduğu açıktır. Gayemiz $\{K_v/v\in D\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu göstermektir. Yani, her sonlu dizi $v_1,\ldots,v_n\in D$ için, $K_{v_1} \cap \ldots \cap K_{v_n} \neq \emptyset$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için, $v_1,\ldots,v_n \in D$ alalım ve $F = \text{span}\,\{v_1,\ldots,v_n\}$ $[\{v_1\ldots v_n\}$ nin doğurduğu alt-uzay$]$ koyalım. $F$, $E$ nin bir sonlu-boyutlu alt uzayıdır. $D$ kümesi açık olduğu için, Önerme III.2.4/2 ye göre, $\partial_F(F\cap D) = F\cap\partial D$ dir.

Şimdi, $J_F:F\to E$ doğal gömme ve $J_F^*:E'\to F'$ onun adjointu olsun. $A_F=J_F^*AJ_F$ koyalım. $A$ operatörü $\bar{D}$ üzerinde monoton, sonlu-sürekli; ve $J_F$ ve $J_F^*$ operatörleri de, karşılıklı olarak, $\sigma(E,E')$ ve $\sigma(E',E)$ topolojileri için sürekli, olduklarından, $A_F:\bar{D}\cap F\to F'$ monoton ve süreklidir. Varsayım gereği,

$$\forall u \in \partial_F(F\cap D), \quad \langle A_F(u),u\rangle_{F',F} > 0$$

dır. Ayrıca, $F\cap D$ kümesi $F$ nin açık ve sınırlı ve sıfırı içeren bir kümesidir. O halde, Önerme III.2.2. ye göre, en az bir $u_F \in F\cap D$ için,

$$A_F(u_F) = 0 \qquad \text{(I)}$$

dır. (I) eşitliğini $u_F$ ile, ve her $1 \leq i \leq n$ için, $v_i$ ile çarparsak,

$$\langle A_F(u_F),u_F\rangle_{F',F} = \langle J_F^*AJ_F(u_F),u_F\rangle_{F',F} = \langle A(u_F),u_F\rangle_{E',E}=0 \qquad \text{(II)}$$

ve

$$<A_F(u_F), v_i>_{F',F} = <J_F^* A J_F(u_F), v_i>_{F',F} = <A(u_F), v_i>_{E',E} = 0 \quad \text{(III)}$$

buluruz. A operatörü $\bar{D}$ üzerinde monotondur; o halde, her $v_i$, $1 \leq i \leq n$, için,

$$<A(u_F) - A(v_i),\ u_F - v_i>_{E',E} \geq 0 \qquad \text{(IV)}$$

dır. (IV) açar, (II) ve (III) ü kullanırsak,

$$\forall\ i = 1,2,\ldots,n, \quad < A(u_F),\ u_F - v_i>_{E',E} \geq 0$$

buluruz ki, bu da, $u_F \in K_{v_1} \cap \ldots \cap K_{v_n}$ demektir. Böylece $\{K_v / v \in D\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu göstermiş olduk. $K_v$ kümeleri $\sigma(E,E')$-kapalı, $K_v \subseteq \bar{D}$ ve $\bar{D}$ de $\sigma(E,E')$-tıkız olduğu için, iyi bilinen bir topoloji teoremine göre, $\bigcap_{v \in D} K_v \neq \emptyset$ dir. $u_o \in \bigcap_{v \in D} K_v$ olsun. Her $v \in D$ için, $u_o \in K_v$ dir. O halde,

$$\forall\ v \in D, \ < A(v),\ v - u_o>_{E',E} \geq 0 \qquad \text{(V)}$$

dir. Eğer $u_o \in D$ ise, D açık olduğundan, D kümesi $u_o$ da emicidir. Ayrıca, A operatörü de $\bar{D}$ üzerinde sonlu sürekli olduğu için, $u_o$ da radial-süreklidir. O halde, $u_o \in D$ ise, (V) eşitsizliği, Önerme III.2.1. re göre, $A(u_o) = 0$ olmasını gerektirir ve ispat biter. Şimdi, ispatı bitirmek için, gerçekten $u_o \in D$ olduğunu gösterelim. $u_o \in \bar{D}$ ve D de büzülebilir, açık bir küme olduğundan, her $0 \leq \varepsilon < 1$ için $\varepsilon u_o \in D$ dir. (V) de $v = \varepsilon u_o$ alırsak

$$<A(\varepsilon u_o),\ \varepsilon u_o - u_o>_{E',E} \geq 0$$

ve, $\varepsilon < 1$ olduğu için de,

$$<A(\varepsilon u_o),\ u_o>_{E',E} \leq 0 \qquad \text{(VI)}$$

buluruz. (VI) da, $\varepsilon \to 1-$ yapar ve A nın $\bar{D}$ üzerinde sonlu-sürekli olduğunu kullanırsak,

$$<A(u_o), u_o>_{E',E} \leq 0$$

buluruz. Varsayım gereği, her $u \in D$ için, $<A(u),\ u>_{E',E} > 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik $u_o \in D$ olduğunu verir. O halde, $u_o \in D$ ve $A(u_o) = 0$ dır.//

UYARI: 1) $\bar{D}$ kümesinin $\sigma(E,E')$-kapalı oluşu, Tanım III.2.3. den sonra verilen Örnek 2) de gördüğümüz gibi, D nin konveks olmasını gerektirmez.

2) D kümesinin açık ve $\bar{D}$ nin de $\sigma(E,E')$-tıkız oluşunun $(E,\|\ \|)$ uzayının refleksif olmasını gerektirdiğini burada belirtelim.

TANIM III.2.5- $D \subseteq X$ bir küme olsun. Eğer, X sin her sonlu-boyutlu alt uzayı F için, $D \cap F$ kümesi F de açık ise, D ye 'sonlu-açık'tır, denir.

Her açık küme sonlu-açıktır; karşıtı doğru değildir. Eğer $D \subseteq X$ sonlu-açık ve F de, X sin sonlu-boyutlu bir alt uzayı ise, $\partial_F(D\cap F) \subseteq F\cap\partial D$ dir. Zira

$$\partial_F(D\cap F) = \overline{D\cap F}^F \setminus (D\cap F) = F\cap \overline{D\cap F} \setminus (D\cap F) \subseteq \bar{D}\cap F \setminus (D\cap F)$$

$$= (\bar{D} \setminus D)\cap F \subseteq (\bar{D} \setminus \overset{o}{D}) \cap F = F\cap\partial D \text{ dir.//}$$

Eğer A operatörü $\bar{D}$ den E' ne $\sigma(E,E')$-$\sigma(E',E)$ sürekli ise, Teorem III.2.1. de D üzerine koyduğumuz varsayımları zayıflatabildiğimiz gibi A nın da monotonluğunu kaldırabiliriz. Bu da şimdi vereceğimiz teoremin iddiasıdır.

TEOREM III.2.2.- $D \subseteq E$ sıfırı içeren sonlu-açık bir küme ve $A:\bar{D} \to E'$ $\sigma(E,E')$-$\sigma(E',E)$ sürekli bir operatör olsun. Eğer, $\bar{D}$ $\sigma(E,E')$-tıkız ve her $u\in\partial D$ için, $\langle A(u),u\rangle_{E',E} > 0$ ise, en az bir $u_o\in D$ için, $A(u_o) = 0$ dır.

İSPAT: $\mathcal{F}$ ile E nin bütün sonlu-boyutlu alt uzaylarının kümesini gösterelim. Her $F\in\mathcal{F}$ için $J_F$ ve $J_F^*$ Teorem III.2.1. rin ispatındaki gibi olsunlar. $A_F = J_F^*AJ_F$ koyalım. $A_F:\bar{D}\cap F \to F'$ sürekli bir operatördür, zira A $\sigma(E,E')$-$\sigma(E',E)$ süreklidir. Ayrıca, her $u\in\partial D$ için $\langle A(u),u\rangle_{E',E} > 0$ ve $\partial_F(D\cap F) \subseteq F\cap\partial D$ olduğundan,

$$\forall\ u \in \partial_F(D\cap F),\quad \langle A_F(u),u\rangle_{F',F} > 0$$

dir. O halde, Önerme III.2 ye göre, en az bir $u_F\in D\cap F$ için

$$A_F(u_F) = 0 \qquad \text{(I)}$$

dır. $\{u_F\}_{F\in\mathcal{F}} \subseteq \bar{D}$ ve $\bar{D}$ de $\sigma(E,E')$-tıkız olduğu için, bu ağın, yine aynı notasyon ile göstereceğimiz, $\sigma(E,E')$-yakınsak bir alt ağı vardır. $u_o=\sigma(E,E')\text{-}\lim u_F$ olsun. $u_o\in\bar{D}$ dir; zira, $\bar{D}$ $\sigma(E,E')$-kapalıdır. Şimdi, $v\in E$ alalım. $v$ yi içeren $F\in\mathcal{F}$ ler vardır, örneğin $F_o = \text{span}(v)$. Her $F\in\mathcal{F}$, $F \supseteq F_o$ için, (I) den,

$$\langle A_F(u_F),v\rangle_{F',F} = \langle J_F^*AJ_F(u_F),v\rangle_{F',F} = \langle A(u_F),v\rangle_{E',E}=0 \qquad \text{(II)}$$

dır. O halde, A nın $\bar{D}$ üzerinde $\sigma(E,E')$-$\sigma(E',E)$ sürekli olduğu kullanılır ve (II) de limite geçersek,

$$\langle A(u_o),v\rangle_{E',E} = 0 \qquad \text{(III)}$$

buluruz. (III) eşitliği her $v\in E$ için geçerli olduğundan, $A(u)_o = 0$ dır. Her $u\in\partial D$ için, $\langle A(u),u\rangle_{E',E} > 0$ olduğundan, $u_o \notin \partial D$ dir. O halde, $u_o\in D$ ve $A(u_o) = 0$ dır.//

Teorem III.2.2. de, Teorem III.2.1. gibi, Önerme III.2.2. nin bir genellemesidir. Burada şunu da belirtelim ki, pratikte, $\sigma(E,E')$-$\sigma(E',E)$ sürekli operatörlere rastlamak zordur; monoton ve radial sürekli operatörler ise sık sık rastlanan operatörlerdendir. Örneğin, Nemickii operatörleri [Vainberg, I, s: 150 ve sonrakiler], [Krasnoselski, I, s: 33 ve sonrakiler] için bu özellikleri incelemek zor değildir.//

Önerme III.2.3. ün bir benzerini Hilbert uzayları için vermek mümkündür. Daha genel olarak, $(E,\|\ \|)$ kendisi ve düali kesin-konveks olan bir refleksif Banach uzayı ve $J_\phi:E\to E'$ $\sigma(E,E')$ - $\sigma(E,E')$ sürekli bir düalite operatörü olsun. - Örneğin $E=\ell^p$, $1<p<\infty$ - [Önerme II.1.9 a bakınız]. Teorem III.2. de A yerine $A-J_\phi$ veya $J_\phi-A$ olarak, aşağıdaki, bir çeşit sabit nokta teoremi niteliğinde olan, önermeyi bulunuz.

<u>ÖNERME III.2.6</u>- E ve $J_\phi$ yukarıda izah edildiği gibi; A ve $\bar{D}$ ise Teorem III.2.2. deki gibi olsunlar. Eğer, $\bar{D}$ $\sigma(E,E')$-tıkız ve aşağıdaki koşullardan herhangi bir

a) $\forall\ u\in\partial D,\quad \langle A(u),u\rangle_{E',E} > \phi(\|u\|)\|u\|$

b) $\forall\ u\in\partial D,\quad \langle A(u),u\rangle_{E',E} > \phi(\|u\|)\|u\|$

c) $\partial D$ bağlantılıdır ve her $u\in\partial D$ için, $\langle A(u),u\rangle_{E',E} \neq \phi(\|u\|)\|u\|$.

sağlanıyor ise, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = J_\phi(u_o)$dır.//

Eğer, A operatörü bütün uzay E üzerinde tanımlı veya daha genel olarak, D yi içeren ve her noktasında emici olan bir D' kümesi üzerinde tanımlı ise, aşağıdaki, görünüşün aksine, varsayımlarının sağlanması nispeten kolay olan, teoremi buluruz. Bu teoremde E bir refleksif Banach uzayı, $D=B_r(0)$ ve $D'=B_{r'}(0)$ $(r'>r)$ olarak düşünüldüğünde varsayımların ne ifade ettikleri daha açıkça görülebilmektedir.

TEOREM III.2.3- $D \subseteq \bar{D}^\sigma \subseteq D' \subseteq E$ olan iki küme ve $A:D' \to E'$ bir operatör, olsunlar. Eğer, aşağıdaki koşullar

1) $0 \in D$, D sonlu-açık, $\bar{D}^\sigma$ $\sigma(E,E')$-tıkız ve D' her $u_o \in D'$ da emicidir.

2) A operatörü D' üzerinde monoton, radial-sürekli ve her $u \in \partial D$ için,

$$\langle A(u), u\rangle_{E',E} > 0 \text{ dır.}$$

sağlanıyor ise, en az bir $u_o \in \bar{D}^\sigma$ için, $A(u_o) = 0$ dır.

İSPAT: D' kümesi her $u_o \in D'$ da emici ve A da D' üzerinde monoton ve radial sürekli olduğu için, Önerme III.2.5. e göre, A operatörü D' üzerinde sonlu-süreklidir. Diğer taraftan, D sonlu-açık olduğundan, E nin her sonlu-boyutlu alt uzayı F için, $\partial_F(D \cap F) \subseteq F \cap \partial D$ dir. O halde, her $v \in D'$ için, $K_v = \{u \in \bar{D}^\sigma / \langle A(v), v-u\rangle_{E',E} \geq 0\}$ korsak, Teorem III.2.1. rin ispatında olduğu gibi, $\{K_v / v \in D'\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip bir aile olduğunu buluruz. $\bar{D}^\sigma$ $\sigma(E,E')$ tıkız, $K_v \subseteq \bar{D}$ ve her $K_v$ $\sigma(E,E')$-kapalı olduğu için, $\bigcap_{v \in D'} K_v \neq \emptyset$ dir. $u_o \in \bigcap_{v \in D'} K_v$, olsun. $K_v$ lerin tanımı gereği,

$$\forall\, v \in D', \quad \langle A(v), v-u_o\rangle_{E',E} \geq 0$$

dir. D' kümesi $u_o$ da emici ve A da $u_o$ da radial sürekli olduğu için, Önerme III.2.1. re göre, $A(u_o) = 0$ dir. O halde, $u_o \in \bar{D}^\sigma$ ve $A(u_o) = 0$ dır.//

ÖRNEK: Yukarıdaki teoremin basit bir uygulaması için şöyle bir örneğe bakalım: $(E, \|\ \|)$ bir refleksif Banach uzayı, $A:E \to E'$ monoton h-sürekli olan bir operatör ve $f \in E'$ verilmiş bir eleman olsun.

Eğer aşağıdaki koşullardan,

a) $R > 0: ||u|| = R \Rightarrow \langle A(u)-f,u\rangle_{E',E} > 0$

b) $R > 0: ||u|| = R \Rightarrow \langle A(u)-f,u\rangle_{E',E} < 0$

c) $R > 0: ||u|| = R \Rightarrow \langle A(u)-f,u\rangle_{E',E} \neq 0$ (burada dim E>1 kabul ediyoruz)

d) $R > 0: ||u|| > R \Rightarrow \langle A(u)-f,u\rangle_{E',E} < 0$

herhangi biri sağlanıyor ise, en az bir $u_o \in E$, $||u_o|| \leq R$, için, $A(u_o) = f$ dir. Bunun doğruluğunu görmek için, Teorem III.2.3. de, $D = \{u \in E / ||u|| < R\}$ ve $D' = E$ almak yeterlidir. Ayrıca, A kesin-monoton ise, $A(u_o) = f$ eşitliğini sağlayan $u_o$ tekdir.//

## BİR SABİT NOKTA TEOREMİ

Rothe ait eski(1937) bir sabit nokta teoreminin ifadesi şöyledir (J.T.Schwartz,I, s:96), (Smart, s:27).

TEOREM (Rothe): $(E, ||\ ||)$ Bir Banach uzayı, $D \subseteq E$ açık, sınırlı ve konveks bir küme, ve $A:\bar{D} \to E$ sürekli ve tıkız [$A(\bar{D})$ nın kapanışı tıkızdır.] bir operatör olsun. Eğer, $A(\partial D) \subseteq D$ ise, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = u_o$ dır.//

Burada yapmak istediğimiz şudur: Rothe teoreminde 'konveks' koşulu yerine 'büzülebilir' koşulunu koyarsak teoremin yine geçerliliğini koruduğunu göstermektir. Büzülebilirlik kavramı konveksliği kapsadığından, elde edeceğimiz sonuçla Rothe teoremini genelleştirmiş oluyoruz.

Aşağıdaki önerme İves,R.T. ye aittir. [Tanım III.2.3. den sonra verilen kaynaklar].

ÖNERME III.2.7- $(X,\tau)$ herhangi bir Hausdorff topolojik vectör uzayı, $D \subseteq X$ bir büzülebilir küme ve p de D nin Minkowski fonksiyoneli olsun. Bu durumda, p süreklidir ve

$$\overset{o}{D} = \{u \in X / p(u) < 1\} \subseteq D \subseteq \{u \in X / p(u) \leq 1\} = \bar{D}$$

dir.

İSPAT: Minkowski fonksiyonelinin tanımı gereği, her $u\in X$ için, $p(u) = \inf\{t>0/u\in tD\}$ dir. D bir büzülebilir küme olduğu için sıfırın bir komşuluğudur. Herhangi bir topolojik vektör uzayında sıfırın her komşuluğu emici olan başka bir komşuluk içerir. O halde, D emici ve p sonludur. Ayrıca, tanımdan açıkça görüldüğü gibi, p pozitif-homojendir, ve

$$\overset{o}{D} \subseteq \{u\in X/p(u)<1\} \subseteq D \subseteq \{u\in X/p(u) \leq 1\} \subseteq \bar{D} \qquad \text{(I)}$$

dir.

p nin X üzerinde sürekli olduğunu göstermek için p nin X üzerinde üstten yarı sürekli ve alttan yarı sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. p pozitif-homojen olduğu için, p nin alttan yarı-sürekli oluşu $\{u\in X/p(u)<1\}$ kümesinin açık oluşuna; p nin üstten yarı sürekli oluşu ise $\{u\in X/p(u) \leq 1\}$ kümesinin kapalı oluşuna eşdeğerdirler. O halde, (I) bağıntısına göre, p nin alttan yarı-sürekli oluşu $\overset{o}{D} = \{u\in X/p(u)<1\}$ oluşuna; ve p nin üstten yarı-sürekli oluşu ise, $\bar{D} = \{u\in X/p(u) \leq 1\}$ oluşuna, eşdeğerdirler. Sonuç olarak, p nin sürekli olduğunu göstermek için, $\overset{o}{D} = \{u\in X/p(u)<1\}$ ve $\bar{D} = \{u\in X/p(u) \leq 1\}$ olduklarını göstermek yeterlidir.

$\overset{o}{D} = \{u\in X/p(u)<1\}$ olduğunu gösterelim. Bunun için, $u\in X$ ve $p(u) < 1$ olsun. $\varepsilon = \max\{\frac{1}{2}, p(u)\}$ alalım. $0<\varepsilon<1$ ve p pozitif homojen olduğu için, $p(\frac{u}{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon}\, p(u) < 1$ ve dolayısıyla, (I) e göre, $\frac{u}{\varepsilon} \in \bar{D}$ dir. D büzülebilir olduğu için $\varepsilon\bar{D} \subseteq \overset{o}{D}$ ve $u\in\overset{o}{D}$ dır. O halde $\overset{o}{D} = \{u\in X/p(u)<1\}$ dir.

$\bar{D} = \{u\in X/p(u) \leq 1\}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $u\in\bar{D}$ ve $r=p(u)$ olsun. Eğer $r > 1$ olmuş olsa idi, $p(\frac{u}{\sqrt{r}}) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, p(u) = \sqrt{r} > 1$ ve D büzülebilir olduğu için de $\frac{u}{\sqrt{r}} \in \frac{1}{\sqrt{r}}\,\bar{D} \subseteq \overset{o}{D}$ olurdu. Oysa, $\overset{o}{D} = \{u\in X/p(u) < 1\}$ dir. O halde, $p(\frac{u}{\sqrt{r}}) < 1$ dir. Bu çelişkiden, $p(u) = r \leq 1$ ve $u\in\{u\in X/p(u) \leq 1\}$ buluruz. Böylece $\bar{D}=\{u\ X/p(u)\leq 1\}$ olduğu görülmüş olur ve ispat biter.//

UYARI: $(X,\tau)$ bir Hausdorff topolojik vector uzayı, $V \subseteq X$ sıfırın bir komşuluğu ve p de V nin Minkowski fonksiyoneli olsun. Eğer, V konveks değil ise, V nin sıfırın bir komşuluğu oluşu p nin sürekli olması için yeterli değildir. Zira, yukarıdaki önermenin ispatından anlaşıldığı gibi, p nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul V nin bir büzülebilir küme olmasıdır.

<u>TEOREM III.2.4</u>- $(E, \|\ \|)$ bir Banach uzayı, $D \subseteq X$ bir açık, sınırlı ve büzülebilir küme ve $A:\bar{D} \to E$ bir sürekli ve tıkız operatör, olsunlar. Eğer $A(\partial D) \subseteq D$ ise, en az bir $u_o \in D$ için, $A(u_o) = u_o$ dır.

<u>İSPAT</u>: $p$, $D$ nin Minkowski fonksiyoneli olsun. $D$ bir büzülebilir küme olduğu için, Önerme III.2.7. ye göre, $p$, $X$ üzerinde, süreklidir. Ayrıca, yine aynı önermeye göre, $u \in D$ olması için gerek ve yeter koşul $p(u) < 1$ olması; ve $u \in \partial D$ olması için de gerek ve yeter koşul $p(u) = 1$ olmasıdır.

Her $u \in E$ için, $q(u) = \max\{p(u), 1\}$ koyalım. $q: E \to [1, +\infty[$ bir sürekli fonksiyondur ve $q(u) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in \bar{D}$ olmasıdır. Her $u \in E$ için, $\Phi(u) = \frac{u}{q(u)}$ koyalım. $\Phi: E \to E$ süreklidir. $\Phi(E) \subseteq \bar{D}$ dir, ve her $u \in \bar{D}$ için, $\Phi(u) = u$ dır. Başka bir deyim ile, $\bar{D}$ kümesi $E$ nin bir daralmışı (retract) ve $\Phi$ de $E$ nin bir daraltması (retraction) dır. $A$ operatörü sürekli ve tıkız ve $\Phi$ de sürekli olduğu için, $A \circ \Phi$ operatörü $E$ den $E$ ye sürekli ve tıkızdır. $B$, $A(\bar{D})$ ve $\bar{D}$ yi içeren, $E$ nin bir kapalı yuvarı olsun. - $A(\bar{D})$ ve $\bar{D}$ sınırlı olduklarından, böyle bir yuvar vardır - Schauder sabit nokta teoremine göre, en az bir $u_o \in B$ için, $(A \circ \Phi)(u_o) = u_o$ dır. Şimdi, $u_o \in D$ olduğunu görelim. Bunun için $u_o \in \partial D$ ve $u_o \notin \bar{D}$ hallerinin imkansız olduğunu göstermek yeterlidir.

1) Eğer $u_o \in \partial D$ olmuş olsa idi, varsayım gereği, $A(\partial D) \subseteq D$, ve $\Phi(u_o) = u_o$ olduğu için, $(A \circ \Phi)(u_o) = A(u_o) = u_o \in D$ olurdu. Oysa $D$ açık olduğu için, $D \cap \partial D = \phi$ dır. O halde, $u_o \in \partial D$ hali imkansızdır.

2) Eğer $u_o \notin \bar{D}$ olmuş olsa idi, $p(u_o) > 1$, $q(u_o) = p(u_o)$ ve $\Phi(u_o) = \frac{u_o}{p(u_o)}$ olurdu. $p$ pozitif-homojen olduğu için, $p(\Phi(u_o)) = p\left(\frac{u_o}{p(u_o)}\right) = 1$ dir. Bu ise $\Phi(u_o) \in \partial D$ olmasını gerektirir. Bu da, $A(\partial D) \subseteq D$ olduğundan, $u_o \in D$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. O halde, $u_o \notin \bar{D}$ hali de imkansızdır.

$u_o \notin \partial D$ ve $u_o \notin \bar{D}$ halleri imkansız olduğuna göre, $u_o \in D$ dir. Ama, $u_o \in D$ için, $\Phi(u_o) = u_o$ dır. O halde, $u_o \in D$ ve $A(u_o) = u_o$ dır.//

# SONUÇ

Bu çalışmada yapılanları ve bunlar ile düşüncelerimizi şöyle özetliyebiliriz:

BÖLÜM I bir sentez çalışmasıdır. Burada Banach uzaylarının geometrisi ve lineer olmayan operatörler teorisi ile ilgili, çalışmamız için gerekli olan, bilgiler toplanmıştır.

KISIM II.1 de düalite operatörleri genelleştirilmiş ve bu operatörlerin çeşitli özellikleri incelenmiştir. Burada yapılan çalışma düalite operatörlerini genelleştirdiği gibi, aynı zamanda da, düalite operatörlerine Bishop-Phelps teoreminden itibaren yeni bir yaklaşımdır. Düalite operatörlerinin çeşitli uygulaması vardır [Browder 2,3], [Fucik et al] [Lions, 1], [Vainberg, 2]. Bu uygulamalarda, üzerinde çalışılan uzay, genellikle bir refleksif Banach uzayı - çoğu zaman, bir Sobolev uzayı - dır. Oysa, lineersizliği 'kuvvetli' olan [örneğin, $A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} e^{\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}\right) + ue^{u^2}$ gibi] operatörler üzerine yapılan çalışmalar [Donaltson, I, s: 507-528], [Fougères, I, s: 763-65]. Bu tip operatörlere bağlı olarak verilen eşitlik ve eşitsizliklerin çözümün bir Sobolev-Orlicz uzayının ikinci düalinde olduğunu göstermiştir. Genelleştirilmiş düalite operatörlerinin lineersizliği kuvvetli olan operatörlerin incelenmesinde yararlı olabileceği kanısındayız.

KISIM II.2 de refleksif Banach uzaylarında, herhangi bir ID-operatörü T ve bir kapalı konveks küme K dan hareketle, T-izdüşüm diye adlandırdığımız bir $u \to k_u \in K$ operatörü tanımlanmış ve bu operatörün klasik izdüşüm operatörünün temel özelliklerine sahip olduğu gösterilmiştir.

Bilindiği gibi ([Edelstein, I, s:375-377], [Baranger, I, s:380, Teorem 1 ve 2], [Ekland, I, s: 466, Corollary, 12])(E,‖ ‖)

bir düzgün-konveks Banach uzayı, $K \subseteq E$ da bir kapalı-ama konveks olmayan- küme ise, izdüşüm operatörü $u \to P_K u$ bütün uzay üzerinde tanımlı değildir [$P_K$ nın tanım alanı E ni bir yoğun $G_\delta$-kümesidir]. T-izdüşüm kavramını tanımlamakta, başlangıçta, gayemiz 'düzgün-konveks Banach uzaylarında, konveks olmayan kapalı kümeler için, klasik izdüşüm operatörünün yerine kullanılabilecek, bir izdüşüm kavramı tanımlamak' idi. Bu yönde uğraşılarımız bunun yapılabilmesinin aşağıdaki sorunun çözümüne bağlı olduğunu gösterdi.

SORU: $(E,\tau)$ bir yerel konveks topolojik vektör uzayı, $K \subset E$ bir tıkız küme ve $T: K \to E'$ bir sürekli operatör olsun.

$$\forall\, v \in K, \quad \langle T(u_o),\, u_o - v \rangle_{E',E} \leq 0$$

varyasyonel eşitsizliğini sağlayan bir $u_o \in K$ var mıdır?

Burada hemen belirtelim ki, eğer K konveks ise, böylesi bir $u_o$ rın varlığı bilinmektedir [Browder, 4, s: 286, Teorem 3]. Bu sorunun çözümü, ki bunun ne ölçüde mümkün olacağını bilmiyoruz, konveks olmayan optimizasyon teorisinde önemli olacağı düşüncesindeyiz. Kanımızca, T-izdüşüm kavramından bu yönde yararlanılabilir.

KISIM III.1 de $\tilde{M}$-tipi operatörlere bağlı olarak verilen varyasyonel eşitsizliklerin çözümünün varlığı gösterilmiştir. Bu tip operatörler daha önce H.Brezis [Brezis, I] tarafından incelenmiş ve bu tip operatörler ile verilen eşitliklerin çözümünün varlığı gösterilmiştir. Burada yapılanlar, Kısım II.2 nin bir uygulaması olduğu gibi, bir ölçüde de, Brezis'in bu çalışmasını tamamlamaktadır.

KISIM III.2 de, Banach uzaylarında, $A(u) = f$ denkleminin çözümünün varlığı üzerine bir dizi önerme ve teorem ispatlanmıştır. Bunlar içinde, kanımızca, en iyileri Önerme III.2.1, III.2.5, Teorem III.2.1., III.2.2., III.2.3., III.2.4. dür. Teorem III.2.4. bir sabit nokta teoremidir. Bu teorem Rothe'ın sabit nokta teoreminin büzülebilir kümeler için de geçerli olduğunu göstermektedir. Ayrıca, burada yapılanların büzülebilir kümelerin de konveks kümeler gibi önemli bir sınıf oluşturduğunu gösterdiği kanısındayız. Önerme III.2.4. ve III.2.7. de gördük ki konveks kümelerin bazı önemli özellikleri büzülebilir kümeler için de doğrudur. Şüphesiz, büzülebilir kümelerin bütün özellikleri bunlar değildir; konveks kümelerin diğer özelliklerinin hangi ölçüde büzülebilir kümeler için de geçerli olduğunun incelenmesinin yararlı olacağı düşüncesindeyiz.

# KAYNAKLAR


1- Adams,R. (1) — Sobolev Spaces. Academic Press, New York (1975).

2- Aspulund,E. (1) — Averaged Norms. Israel J. of Math. 5 (1967) p:227-233.

3- Aspulund,E. (2) — Positivity of Duality Mappings. Bull. Amer.Math.Soc. 73 (1967) p:200-203.

4- Baranger,J. (1) — Existence de solutions pour des problemes d'optimisation non convexe J.Math.Pures et appl. 52 (1973) p:377-405.

5- Berger,M.-Berger,M. (1) — Perspective in Nonlinearity, W.A.Benjamin Inc., New York (1968).

6- Bishop-Phelps, (1) — A proof that all Banach spaces are sub-reflexive. Bull.Amer.Math.Soc. 67 (1961), p: 97-98.

7- Bourbaki,N. (1) — Topolgie Generale, Hermann, Paris (1961).

8- Brezis,H. (1) — Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Ann. Inst.Fourier, 18.1 (1968), p:115-175.

9- Brezis,H. (2) — Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland Pub.Com.Amsterdam (1973).

10- Brezis-Crandall-Pazy (1) — Perturbations of nonlinear maximaux monotones Sets. Comm.Pure et App. Math. 23 (1970) p:123-144.

11- Browder,F. (1) — Multivalued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach Spaus. Trans.Am.Math.Soc. 118 (1965), p:338-351.

12- Browder,F. (2) — Nonlinear Maximal Monotone Operators in Banach Spaces. Math. Annalen 175 (1968) p:89-112.

13- Browder, F. (3) Nonlinear accretive operators in Banach Spaces. Bull.Amer.Math. Soc. 73 (1967), p:470-476.

14- Browder, F. (4) A New Generalization of the Schauder Fixed Point theorem. Math.Annalen 174, (1967) p:285-290.

15- Browder, F. (5) The Fixed Point Theory of Multi-valued Mappings in Topological Vector Spaces.

16- Browder, F. (6) Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Bull.Amer.Math.Soc. 69, (1963) p:862-874.

17- Browder-Hess (1) Nonlinear Mappings of Monotone Type in Banach Spaces. Jorn.of Funct.Analy. 11 (1972), p:251-294.

18- Clarkson, J.A. (1) Uniformly Convex Spaces. Amer.Math. Soc.Trans. 40(1936), p:398-414.

19- Diestel, J. (1) Geometry of Banach Spaces. Selected Topics. Springer-Verlag, 485 (1975).

20- Donaltson, T. (1) Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems in Orlicz-Sobolev Spaces. Jorn. of Diff. Eq. 10 (1971), p:507-528.

21- Edelstein, M. (1) On nearest points of sets in uniformly convex Banach Spaces. J.London.Math.Soc. Vol.: 43 (1968) p:375-377.

22- Ekland, I. (1) Nonconvex Minimization Problems. Bull.Amer.Math.Soc. Vol.1, No.3 (1979) p:443-474.

23- Ekland-Temam, (1) Convex Analysis and its applications. North-Holland Pub. Comp. Amsterdam (1976).

24- Fougères, A. (1) Opérateurs Elliptiques du Calcule des Variations à coefficients très fortement non linéaires. C.R. Acad. Sc. Paris, t=274 A (1972) p:673-765.

25- Fucik, S.-Necas, J. Socek, J.-Soucek, V. (1) Spectral Analysis of Nonlinear Operators Springer-Verlag, 346 (1973).

26- Hewitt, E.-Stromberg, K. (1) Real and Abstract Analysis. Springer-Verlang (1965).

27- Holmes, R.B. (1) A Course on Optimization and Best Approximation Springer-Verlang, 257, (1972)

28- Holmes, R.B. (2) Geometric Functional Analysis and its Applications Springer-Verlag, (1975).

29- Horwath,J. (1) — Topological Vector Spaces and Distributions Addison-Wesley Pub.Comp. (1966).

30- Klee,V. (1) — Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces. Math.Annalen 141. (1960), p:281-285.

31- Köthe,G. (1) — Topological Vector Spaces, (I), Springer-Verlag (1969).

32- Krasnosel'skii,M.A. (1) — Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon, (1964).

33- Krasnosel'skii.M.A. Rutickii,Ya.B. (1) — Convex Functions and Orlicz Spaces Nordhoff (1961).

34- Leray,J.-Schauder,J. (1) — Topolgie et Equations Fonctionelles Ann.Ecole.Norm.Sup.(3) 51, (1934) p.45-78.

35- Lions,J.L. (1) — Quelques Méthodes de Résolution Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires Dunod, Paris (1969).

36- Smart,D.R. (1) — Fixed Point Theorems. Cambridge Univ. Press (1974.

37- Schwartz,J.T. (1) — Nonlinear Functional Analysis. Gordon and Breach Science Pub. Inc. (1969).

38- Sundareson,K. (1) — Orlicz Spaces isomorphic to Strictly Convex Spaces. Proc.Amer.Math.Soc. 17(1966) 1353-56.

39- Trajanski,S.L. (1) — On Locally Uniformly Convex and differentiable norms in certain non-seperable Banach Spaces. Studia Math. 37, (1971), 173-180.

40- Vainberg,M.M. (1) — Variational Method for the Study of Nonlinear Operators. Holden-Day Icn. San Francisco (1964).

41- Vainberg,M.M. (2) — Variational Method and Method of Monotone operators in the study of nonlinear equations. John-Willey and Sons. New York (1973).

42- Vishik,M.I. (1) — Systemes quasi-lineaires fortement elliptiques d'équations differentielles de forme divergente. Trudi. Moskov.Math.Obs. t=12 (1963), p:125-184.

43- Wilansky,J. (1) — Functional Analysis. Blaisdell Pub. Comp. New York (1964).

44- Yosida,K. (1) — Functional Analysis. Springer-Verlag (1974).