

FOR REFERENCE

NOT TO BE TAKEN FROM THIS ROOM

p -DEĞERLİ KUVAZİMEROMORF FONKSİYONLAR HAKKINDA

Dr. ZERRİN GÖKTÜRK

Bogazici University Library



14

39001100543381

**DOÇENTLİK TEZİ
MART 1979**

Bu çalışmanın amacı, düzlemin kısmen konform olan kuvazikonform homeomorfizmaları ile ilgili bazı sonuçları, düzlemin kısmen analitik olan kuvazimeromorf fonksiyonlarına genelleştirmektir.

Burada sunulan çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kuvazikonform tasvirlerin tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, düzleme kuvazikonform genişlemesi olan yalınkat fonksiyonlar ile ilgili ekstremal problemlerin çözümünde kullanılan ve Majorant prensibi olarak bilinen bir genel eşitsizlikten kısaca bahsedilmiş, üçüncü bölümde kullanılan bazı notasyon ve kavramlar verilmiştir.

Bu çalışmanın özgün kısmını oluşturan üçüncü bölümde,

1. genişletilmiş düzlemin, $|z| > 1$ bölgesine kısıtlaması meromorf olan, $\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z^p) = 0$, $p \in \mathbb{N}$, normalizasyonunu gerçekliyen, $f(z) = \infty$ değerini yalnız $z = \infty$ noktasında alan k -kuvazimeromorf f fonksiyonları sınıfı, Σ_k^p , gözönüne alınarak,

- Σ_k^p sınıfı fonksiyonları için, Faber polinomları cinsinden bir gösteriliş teoremi (ayrılış teoremi) ispatlanmış,
- $f(z)$ fonksiyonunu $\mu = f_z/f_z$ kompleks dilatasyonu cinsinden ifade eden bir gösteriliş formülü çıkarılmış,
- bu formül kullanılarak, $k \rightarrow 0$ için, $f(z)$, $|f(0)|$ ve f fonksiyonunun kuvvet serisi katsayıları $|a_n|$ için kesin asimtotik tahminler bulunmuş,
- gösteriliş teoremi kullanılarak, f fonksiyonunun $|a_1|$ katsayısı için asimtotik olmayan (her k , $0 < k < 1$, için geçerli olan) bir kesin üst sınır bulunmuş,
- gösteriliş formülü kullanılarak, $f(z)$ fonksiyonunun μ kompleks dilatasyonuna analitik bağıllığı incelenmiş ve buna dayanarak, ilk defa Alenicy'n tarafından verilen Alan teoreminin yeni bir ispatı verilmiş,
- kuvazikonform homeomorfizmalar için verilen Majorant prensibinin bir genelleştirilmesi verilmiştir.

2. Genişletilmiş düzlemin, $|z| < 1$ daireinde analitik olan, $z \rightarrow 0$ için $f(z) = z^p + o(z^{p+1})$ normalizasyonunu gerçekleyen, $f(z) = 0, \infty$ değerini yalnız, sırasıyla, $z = 0, \infty$ noktalarında alan f k -kuvazimeromorf fonksiyonları, $S_k^p(\infty)$, sınıfı gözönüne alınarak,

- $S_k^p(\infty)$ sınıfı fonksiyonları için, bir gösteriliş teoremi ispatlanmış,
- bu gösteriliş teoremi kullanılarak, f fonksiyonunun $|b_{p+1}|$ kuvvet serisi katsayısı için bir kesin tahmin bulunmuştur.

Ayrıca, bu çalışmada bazı ilginç açık problemler de ortaya çıkmış, bunlardan ikisi tanımlanarak, çalışmanın sonunda sunulmuştur.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iii
KULLANILAN SİMGELER	v
GİRİŞ	1
I. KUVAZİKONFORM TASVİRLER	6
1.1. Kuvazikonform Diffeomorfizmalar	6
1.2. Beltrami Differansiyel Denklemleri	7
1.3. Kuvazikonform Tasvirlerin Genel Tanımı	9
1.4. Beltrami Diferansiyel Denkleminin Varlık ve Teklik Teoremleri	14
II. KUVAZİKONFORM GENİŞLEMESİ OLAN YALINKAT FONKSİYONLAR	16
2.1. Σ_k Sınıfı	16
2.2. Σ_k Sınıfı için Majorant Prensibi	19
III. p -DEĞERLİ KUVAZİMEROMORF FONKSİYONLAR	25
3.1. Σ_k^p Sınıfı	25
3.2. Gösteriliş Formülü	28
3.3. Asimtotik Tahminler	31
3.4. Analitik Bağılılık	36
3.5. Σ_k^p Sınıfı için Majorant Prensibi	39
3.6. $S_k^{p(\infty)}$ Sınıfı	40
3.7. Yoğunluk Problemi	43
KAYNAKLAR	45

KULLANILAN SİMGELER

$f_z, f_{\bar{z}}$	: Kompleks kısmi türevler
$\partial_\alpha f$	: α doğrultusundaki türev
$f \circ g$	: Bileşke fonksiyonu
$J(z)$	: Jakobiyen
m	: Lebesgue alan ölçüsü
H_w	: Hilbert transformasyonu (18)*
$\ H\ _p$	: Hilbert transformasyonunun L^p -normu (18)
$O(k^2)$	: k^2 ile bölündüğünde $k = 0$ dolayında sınırlı bir ifade.
$O(z - z_0)$	: $(z - z_0)$ ile bölündüğünde, $z \rightarrow z_0$ için sıfıra giden bir ifade
μ	: Kompleks dilatasyon (8)
$\ \mu\ _\infty$	: Essential supremum
Σ	: Yalınkat meromorf fonksiyonlar sınıfı (3)
S	: Yalınkat holomorf fonksiyonlar sınıfı (3)
$\Sigma_k, S_k(\infty)$	: k -kuvazikonform homeomorfizmalar sınıfları (16, 24)
Σ_1^p	: p -değerli meromorf fonksiyonlar sınıfı (28)
$\Sigma_k^p, S_k^p(\infty)$	: p -değerli k -kuvazimeromorf fonksiyonlar sınıfları (26, 40).

* Parantez içindeki sayı, simgenin çalışmada tanımlandığı sahife numarasını göstermektedir.

GİRİŞ

Kuvazikonform tasvirler teorisi tam elli yaşındadır. Kuvazikonform tasvir tanımı ilk defa Herbert Grötzsch [7] tarafından diffeomorfizmalar için verilmiştir. Bir diffeomorfizma sonsuz küçük bir daireyi sonsuz küçük bir elipse tasvir eder. Tasvir elipslerinin eksenlerinin oranı düzgün sınırlı ise tasvir kuvazikonformdur. Aynı sınıf fonksiyonlar 1935 yılında M.A. Lavrentief [8] tarafından, fakat kısmi türevli diferensiyel denklemler açısından incelenmiştir. Kuvazikonform tasvirlerin konform tasvirlerin bir genelleştirilmesi olarak ele alınması, kendi içinde ilginç olan pek çok ekstremal problemin incelenmesine yol açmıştır. Kuvazikonform diffeomorfizmalar sınıfının kompakt olmaması, bunun problemlerin çözümünde sakınca oluşturması nedeniyle, kuvazikonformluk tanımı daha sonra homeomorfizmalar için genişletilmiştir.

Kuvazikonform tasvirlerin, yeniden yeni bir araştırma sahası olarak doğuşunu Oswald Teichmüller [22] in 1939 yılında yayınladığı ünlü çalışmasına borçluyuz. Teichmüller göstermiştir ki, kuvazikonform tasvirin ekstremal problemi, Riemann yüzeylerine uygulandığında, yüzey

üzerindeki holomorf kuadratik diferensiyeller ile sıkı ilişkilidir. Böylece, konform olmayan tasvirlerle ilgili bir problem holomorf diferensiyeller cinsinden ifade edilebilen bir çözüme ulaşmaktadır. Aynı çalışmada Teichmüller, daha sonra Teichmüller uzayları teorisi olarak adlandırılan teorinin temelini atmıştır. Kuvazikonform tasvirler teorisinin, Riemann yüzeyleri, Teichmüller uzayları, Fuchsian ve Kleinian gruplara kadar varan doğrultusundaki gelişiminin temelini Teichmüller'in bu ve daha sonraki çalışmaları oluşturmaktadır [23, 24].

Düzlemdeki kuvazikonform tasvirler teorisine, n -boyutlu Reel uzayda karşılık olan, kuvaziregüler tasvirler teorisi olarak bilinen, ilginç açık problemlerle dolu bir teori vardır. Bu teorinin kurulması F. Gehring ve J. Väisälä'nin çalışmaları ile olmuştur denilebilir¹⁾. Kısa bir zaman önce, S. Rickmann kuvaziregüler tasvirler için değer dağılımı teorisini kurmayı başarmış, Picard teoreminin kuvaziregüler tasvirler için bir genelleştirilmesini ispatlamıştır [17, 18, 19, 20].

Düzlemin kısmen konform olan kuvazikonform homeomorfizmaları son yıllarda büyük bir ilgi görmüştür. Bunun başlıca iki nedeni vardır. Birincisi, bu tasvirler Teichmüller uzaylarına yeni bir tanım getirmektedir. Bu tanımın getirdiği pek çok problem L. Ahlfors [1] ve O. Lehto [11] tarafından sistemli bir şekilde incelenmiştir. İkinci olarak, bu tasvirler yalınkat fonksiyonlar teorisine, düzleme kuvazikonform genişlemesi olan yalınkat fonksiyonlar açısından önemli gelişmeler getirmiştir. Çalışmalarda başlıca iki sınıf gözönüne alınmıştır:

¹⁾ F. Gehring ve J. Väisälä'nin listelenmesi güç olacak pek çok çalışması vardır. Ancak, [26] No.lu kaynak bu çalışmaların derlenmesinden oluşan bir kitaptır.

Σ Sınıfı: $|z| > 1$ bölgesinde yalınkat meromorf olan,
 $\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0$ ile normalize edilmiş f fonksiyonları sınıfı,

S Sınıfı: $|z| < 1$ dairesinde yalınkat ve holomorf olan,
 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş f fonksiyonları sınıfı.

Her iki halde de, fonksiyonların genişletilmiş düzleme bir kuvazikonform genişlemesinin var olduğu kabul edilmiştir. Geometrik açıdan bu şu demektir: Gözönüne alınan fonksiyonlar, birim daireyi kuvazikonform eğri denilen bir eğri ile sınırlanmış bir bölgeye tasvir eder. Bir kuvazikonform eğri, bir çemberin düzlemin bir kuvazikonform homeomorfizması ile tasviri olarak tanımlanır. Tersine, f fonksiyonu, birim daireyi bir kuvazikonform eğri ile sınırlanmış bir bölgeye tasvir eden bir yalınkat fonksiyon ise, f düzleme kuvazikonform olarak genişletilebilir.

Yalınkat fonksiyonlar ile ilgili pekçok ekstremal problem, düzleme kuvazikonform genişlemesi olan yalınkat fonksiyonlar için incelenmiş, kuvazikonform genişlemenin varlığının, ekstremallerin özellikleri üzerinde büyük etkisi olduğu görülmüştür.

Düzlemde kuvazikonform fonksiyonlar izole noktalar dışında yerel kuvazikonform homeomorfizmalardır. Bu nedenle, kuvazikonform fonksiyonlar kuvazikonform homeomorfizmaların temel özelliklerini taşırlar.

Düzlemin kısmen analitik olan kuvazimeromorf fonksiyonları üzerinde ilk çalışma Alenicyan [2] tarafından yapılmıştır. Alenicyan bu fonksiyon sınıfına ait bir Alan teoremi ispatlamıştır.

Burada sunulan çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kuvazikonform tasvirlerin tanımı ve bazı temel özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, düzleme kuvazikonform genişlemesi olan yalıncat fonksiyonlar ile ilgili ekstremal problemlerin çözümünde kullanılan ve Majorant prensibi olarak bilinen bir genel eşitsizlikten kısaca bahsedilmiş, üçüncü bölümde kullanılan bazı notasyon ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm bu çalışmanın özgün kısmını oluşturmakta olup, 1975 yılındanberi üzerinde çalışmakta olduğum, düzlemin kısmen analitik olan kuvazimeromorf fonksiyonları ile ilgili, bugüne kadar elde etmiş olduğum sonuçlardan oluşmaktadır. Amaç, düzlemin kısmen konform olan kuvazikonform homeomorfizmaları ile ilgili bazı sonuçları, düzlemin kısmen analitik olan kuvazimeromorf fonksiyonlarına genelleştirmektir. Bu bölümde başlıca iki fonksiyon sınıfı incelenmiştir.

1. Genişletilmiş düzlemin, $|z| > 1$ bölgesine kısıtlaması meromorf olan, $\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z^p) = 0$, $p \in \mathbb{N}$, normalizasyonunu gerçekliyen, $f(z) = \infty$ değerini yalnız $z = \infty$ noktasında alan k -kuvazimeromorf f fonksiyonları sınıfı, Σ_k^p , gözönüne alınarak,

a) Σ_k^p sınıfı fonksiyonları için, Faber polinomları cinsinden bir gösteriliş teoremi (ayrılış teoremi) ispatlanmış,

b) $f(z)$ fonksiyonunu $\mu = f_z/f_z$ kompleks dilatasyonu cinsinden ifade eden bir gösteriliş formülü çıkarılmış,

- c) bu formül kullanılarak, $k \rightarrow 0$ için, $f(z)$, $|f(0)|$ ve f fonksiyonunun kuvvet serisi katsayıları $|a_n|$ için kesin asimtotik tahminler bulunmuş,
- d) gösteriliş teoremi kullanılarak, f fonksiyonunun $|a_1|$ katsayısı için asimtotik olmayan (her k , $0 < k < 1$, için geçerli olan) bir kesin üst sınır bulunmuş,
- e) gösteriliş formülü kullanılarak, $f(z)$ fonksiyonunun μ kompleks dilatasyonuna analitik bağıllığı incelenmiş ve buna dayanarak, ilk defa Alenicy'n tarafından verilen Alan teoremi-nin yeni bir ispatı verilmiş,
- f) kuvazikonform homeomorfizmalar için verilen Majorant prensi-binin bir genelleştirilmesi verilmiştir.

2. Genişletilmiş düzlemin, $|z| < 1$ dairesinde analitik olan, $z \rightarrow 0$ için $f(z) = z^p + o(z^{p+1})$ normalizasyonunu gerçekleyen, $f(z) = 0, \infty$ değerini yalnız, sırasıyla, $z = 0, \infty$ noktalarında alan f k -kuvazime-romorf fonksiyonları, $S_k^p(\infty)$ sınıfı gözönüne alınarak,

- a) $S_k^p(\infty)$ sınıfı fonksiyonları için, bir gösteriliş teoremi ispatlanmış,
- b) bu gösteriliş teoremi kullanılarak, f fonksiyonunun $|b_{p+1}|$ kuvvet serisi katsayısı için bir kesin tahmin bulunmuştur.

Ayrıca, bu çalışmada bazı ilginç açık problemler de ortaya çıkmış, bunlardan ikisi tanımlanarak, çalışmanın sonunda sunulmuştur.

I. KUVAZİKONFORM TASVİRLER

Bu bölümde kuvazikonform tasvirlerin tanımı ve bazı temel özellikleri verilecektir.

Kuvazikonform tasvir tanımı, ilk defa 1928 yılında Herbert Grötzsch [6] tarafından diffeomorfizmalar için verilmiştir. Bu nedenle, aşağıda ilk önce Grötzsch sınıfı kuvazikonform tasvirlerin (kuvazikonform diffeomorfizmaların) tanımı verilecektir.

1.1. Kuvazikonform Diffeomorfizmalar

f fonksiyonu kompleks düzlemin sonlu B bölgesinin B' bölgesi üzerine bir diffeomorfizması olsun; yani, $f: B \rightarrow B'$ üzerine, bire-bir bir tasvir, f fonksiyonu B bölgesinde, f fonksiyonunun tersi f^{-1} B' bölgesinde sürekli türetilebilir olsunlar.

$$z, z_0 \in B \text{ için}$$

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|)$$

dır. Burada $f_z = (1/2)(f_x - if_y)$ ve $f_{\bar{z}} = (1/2)(f_x + if_y)$ dir.

$z - z_0 = re^{i\alpha}$ alalım. $\partial_\alpha f$ ile f fonksiyonunun α doğrultusundaki türevini gösterirsek,

$$(1.1) \quad \partial_{\alpha} f(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}} = f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-2i\alpha}$$

olur.

Tanım 1.1. $f: B \rightarrow B'$ yönü koruyan bir diffeomorfizma olsun.

Her $z \in B$ için

$$(1.2) \quad \max_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z)|$$

ise f fonksiyonuna K -kuvazikonformdur denir.

f_i K_i -kuvazikonform, $i = 1, 2$, ve $f_2 \circ f_1$ bileşke diffeomorfizması tanımlı ise, $f_2 \circ f_1$ $K_1 K_2$ -kuvazikonformdur. Bundan başka, f K -kuvazikonform ise, f^{-1} fonksiyonuda K -kuvazikonformdur.

Tanımdan, bir diffeomorfizmanın ancak ve ancak konform ise 1-kuvazikonform olduğu görülür.

Uygun yardımcı Möbius dönüşümü kullanılarak bu tanım $\infty \in B$ veya $\infty \in B'$ olması durumuna genişletilebilir.

1.2. Beltrami Diferensiyel Denklemi

$f: B \rightarrow B'$ yönü koruyan bir diffeomorfizma olsun. O takdirde, f dönüşümünün Jakobiyeni, her $z \in B$ için

$$(1.3) \quad J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0,$$

dolayısıyla $f_z(z) > 0$ dır. O halde her $z \in B$ için

$$(1.4) \quad \mu(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$$

fonksiyonu tanımlıdır ve süreklidir. Ayrıca (1.3) den $|\mu(z)| < 1$ dir. μ fonksiyonuna f tasvirinin KOMPLEKS DİLATASYONU denir.

μ kompleks dilatasyonunun basit bir geometrik yorumu vardır:

(1.1) den

$$(1.5) \quad \max_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z_0)| = |f_z(z_0)| + |f_{\bar{z}}(z_0)|$$

$$\min_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z_0)| = |f_z(z_0)| - |f_{\bar{z}}(z_0)|$$

olduğundan

$$\frac{\max_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z_0)|}{\min_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z_0)|} = \frac{1 + |\mu(z_0)|}{1 - |\mu(z_0)|}$$

elde edilir. O halde, z_0 merkezli sonsuz küçük bir daire eksenlerinin oranı $(1 + |\mu(z_0)|)/(1 - |\mu(z_0)|)$ olan sonsuz küçük bir elipse tasvir olunur. Bundan başka, (1.1) den $|\partial_{\alpha} f(z_0)|$ nin maksimum değeri $|f_z(z_0)|(1 + |\mu(z_0)|)$ yi $\alpha = (1/2)\arg \mu(z)$ için aldığı görülür.

μ kompleks dilatasyonunun tanımı (1.4) bir diferensiyel denklem olarak yorumlanabilir: Yönü koruyan her $f: B \rightarrow B'$ diffeomorfizması bir

$$(1.6) \quad f_{\bar{z}} = \mu f_z, \quad |\mu| < 1,$$

Beltrami diferensiyel denklemini gerçekler.

0 halde, Tanım 1.1 şu şekilde de verilebilir.

$f:B \rightarrow B'$ yönü koruyan bir diffeomorfizma olsun.

$$\sup_{z \in B} |\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1}$$

ise f ye K -kuvazikonformdur denir. Bu halde, B' bölgesinde tasvir elipslerinin eksenlerinin oranı düzgün sınırlıdır.

Kuvazikonform tasvirler teorisinde yalnız diffeomorfizmaların gözönüne alınmasının bazı önemli sakıncaları vardır:

1⁰) $\{f_n\}$ bir B bölgesinin bir K -kuvazikonform diffeomorfizmaları dizisi olsun. $\{f_n\}$ dizisi B nin her kompakt alt kümesinde düzgün olarak bir f fonksiyonuna yakınsasın. $K = 1$, yani f_n fonksiyonları konform ise, limit fonksiyonu f ya bir sabit, veya bir konform tasvirdir. Fakat, $K > 1$ ise f bir K -kuvazikonform diffeomorfizma olmayabilir. Diğer bir deyişle, K -kuvazikonform diffeomorfizmalar sınıfı $K > 1$ için kompakt değildir.

2⁰) $\sup_{z \in B} |\mu(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen her sürekli μ fonksiyonu bir kuvazikonform diffeomorfizmanın kompleks dilatasyonu değildir.

1.3. Kuvazikonform Tasvirlerin Genel Tanımı

$R = \{x + iy \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ bir dikdörtgen, I_x , x abisli R nin yatay kenarlarını birleştiren dikey doğru parçası, ve I_y , y ordinatlı R nin dikey kenarlarını birleştiren yatay doğru parçasını gösterebilir.

Tanım 1.2. f bir B bölgesinde tanımlanmış kompleks değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Her $R, \bar{R} \subset A$ dikdörtgeni için $f|_{I_x}$ kısıtlaması hemen hemen bütün $x \in (a,b)$ için mutlak sürekli, $f|_{I_y}$ hemen hemen bütün $y \in (c,d)$ için mutlak sürekli ise, f fonksiyonuna B bölgesinde doğrusal mutlak sürekli¹⁾ denir.

Doğrusal mutlak sürekli olan bir f fonksiyonunun hemen hemen her yerde²⁾ sonlu kısmi türevleri vardır ([9], Lemma III.3.1).

Genel halde, kısmi türevlerin varlığı fonksiyonun türetilebilir olmasını garanti etmez. Homeomorfizmalar için bu durum değişiktir:

Teorem 1.1. $f: B \rightarrow B'$ hemen hemen her yerde kısmi türevleri olan bir homeomorfizma olsun. O takdirde, f fonksiyonu B bölgesinde hemen hemen her yerde türetilebilirdir ([9], Teorem III.3.1).

Tanım 1.3. f fonksiyonu sonlu bir B bölgesinde tanımlanmış sonlu kompleks değerli bir fonksiyon olsun.

1⁰⁾ f fonksiyonu DMS,

2⁰⁾ f fonksiyonunun DMS olması nedeniyle varolan kısmi türevleri $f_z, f_{\bar{z}}$ yerel olarak L^p ye ait; yani, $|f_z|^p, |f_{\bar{z}}|^p$ her kompakt $K \subset B$ cümlesi üzerinden integre edilebilir

ise, f fonksiyonuna B bölgesinde (genelleştirilmiş) L^p -türevlerini ($p \geq 1$) haizdir denir.

1) *Absolutely continuous on lines (ACL): Doğrusal mutlak sürekli (DMS).*

2) *Almost everywhere (a.e.): Hemen hemen her yerde (h.h.y).*

Hölder eşitsizliğinden³⁾ bir fonksiyonun L^p -türevleri varsa, $q \leq p$ için L^q -türevlerinin de var olduğu çıkar.

μ bir B bölgesinde $\|\mu\|_\infty = \text{ess sup } |\mu(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen ölçülebilir bir fonksiyon olsun. (1.6) da olduğu gibi bir

$$(1.7) \quad f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

Beltrami diferensiyel denklemini alalım. μ , B bölgesinde idantik olarak sıfır ise, Beltrami diferensiyel denklemi Cauchy-Riemann diferensiyel denklemine indirgenir.

Tanım 1.4. f fonksiyonunun B bölgesinde L^2 -türevleri var ve f_z , $f_{\bar{z}}$ kısmi türevleri (1.7) denklemini hemen hemen her yerde gerçekleştiriyor ise, f fonksiyonuna (1.7) denkleminin (genelleştirilmiş) L^2 -çözümüdür denir.

μ fonksiyonunun sıfır ölçülü bir cümle üzerindeki değerlerinin değişimi (1.7) nin genelleştirilmiş çözümünü etkilemeyeceğinden, μ nün B de hemen hemen her yerde tanımlı olması yeter.

Tanım 1.5. (Genel kuvazikonform tasvirler) μ bir B bölgesinde $\|\mu\|_\infty \leq (K - 1)/(K + 1) < 1$ koşulunu gerçekleyen ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, bir f fonksiyonu $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ Beltrami denkleminin B bölgesinde bir homeomorfik L^2 -çözümüyse, f fonksiyonuna K -kuvazi-konformdur denir.

³⁾ Hölder eşitsizliği, $F, G \geq 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\iint F G d\sigma \leq (\iint F^p d\sigma)^{1/p} (\iint G^q d\sigma)^{1/q}$ dır.

Bölüm II ve Bölüm III de kuvazikonformluk derecesi için K yerine $\underline{k} = (K - 1)/(K + 1)$ kullanılacaktır.

Beltrami diferensiyel denkleminin homeomorfik L^2 -çözümleri 1938 yılında Morrey [15] tarafından sistematik olarak incelenmiştir. Fakat, ancak yirmi yıl sonra Bers [3] Morrey'nin bu çalışmasının kuvazikonform tasvirlerle ilgisini ortaya çıkarmış ve iki farklı teori birleştirilmiştir.

Kuvazikonform tasvirler teorisinin gelişimi içinde verilen çeşitli tanımlar: Geometrik tanım ([9], I, §3), analitik tanım ([9], IV, §2) ve Tanım 1.5. birbirine denktir ([9], IV.5.3.). Bu çalışmanın bütünlüğünü bozmamak amacıyla burada diğer tanımlardan bahsedilmeyecektir.

Kuvazikonform tasvir tanımının homeomorfizmalara genişletilmesiyle şu kazanılmış olur.

Teorem 1.2. $\{f_n\}$ B bölgesinde tanımlanmış K -kuvazikonform homeomorfizmalar dizisi olsun. f_n dizisi B nin her kompakt alt cümlesinde bir f homeomorfizmasına düzgün yakınsarsa, f fonksiyonu K -kuvazikonformdur ([9], Teorem I.5.2.).

f fonksiyonu bir B bölgesinde K -kuvazikonform olsun. Teorem 1.1 e göre, f fonksiyonu B bölgesinde hemen hemen her yerde türetilebilirdir. O halde, $\|\mu\|_\infty \leq (K - 1)/(K + 1) < 1$ olduğundan, f fonksiyonunun B bölgesinde hemen hemen her yerde

$$\max_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z)| \leq K \min_{\alpha} |\partial_{\alpha} f(z)|$$

eşitsizliğini gerçeklediği kolayca görülür. Ayrıca, f kuvazikonform tasvirinin J Jakobiyesi pozitiftir ([9], s.184, 185).

f , B bölgesinde yönü koruyan bir homeomorfizma olsun. f homeomorfizması bir $z \in B$ de türetilebilir ve $J_f(z) > 0$ ise f homeomorfizmasına z noktasında regülerdir denir. O halde, B bölgesinin bir kuvazikonform homeomorfizması B de hemen hemen her yerde regülerdir.

Bir B bölgesinin f homeomorfizmasının L^2 -türevleri var ise, f fonksiyonu alan ölçüsüne göre mutlak süreklidir; yani, m Lebesgue alan ölçüsünü göstermek üzere $A \subset B$ ve $m(A) = 0$ ise, o takdirde $m(f(A)) = 0$ dır. Bundan başka, J_f f nin Jakobiyenini göstermek üzere, her ölçülebilir $A \subset B$ cümlesi için

$$m(f(A)) = \int_A J_f$$

dir ([9], s. 150 ve s.131). O halde, bir kuvazikonform tasvir alan ölçüsü sıfır olan cümleleri, alan ölçüsü sıfır olan cümlelere tasvir eder.

$f: B \rightarrow B'$ kuvazikonform ve g , B' bölgesinde kuvazikonform olsun. $g \circ f$ bileşke fonksiyonunu gözönüne alalım. μ_f , μ_g ve $\mu_{g \circ f}$ sırasıyla, f , g ve $g \circ f$ fonksiyonlarının kompleks dilatasyonlarını gösterebiliriz. z , $f(z)$, f ve g nin sonlu ve regüler noktaları, ve $g(f(z))$ sonlu olsun. Kompleks dilatasyonun tanımından hareketle, doğrudan doğruya hesapla

$$(1.8) \quad \mu_{g \circ f}(z) = \frac{\mu_f(z) + \mu_g(f(z)) e^{-2i \arg f_z(z)}}{1 + \mu_f(z) \mu_g(f(z)) e^{-2i \arg f_z(z)}}$$

bulunur. Kuvazikonform tasvirin sıfır alan ölçülü cümleleri koruması ve hemen hemen her yerde regüler olması nedeniyle, (1.8) denklemi B bölgesinde hemen hemen her yerde gerçekleşir.

g fonksiyonu B' bölgesinde konform ise, B' de hemen hemen her yerde $\mu_g = 0$ dır. Dolayısıyla, (1.8) den B bölgesinde hemen hemen her yerde

$$\mu_{g \circ f}(z) = \mu_g(z)$$

olduğu sonucu çıkar.

f ve g aynı bir B bölgesinin kuvazikonform tasvirleri ise, (1.8) ifadesi, $\zeta = f(z)$ olmak üzere

$$(1.9) \quad \mu_{g \circ f}^{-1}(\zeta) = \frac{\mu_g(z) - \mu_f(z)}{1 - \mu_g(z)\mu_f(z)} e^{2i \arg f_z(z)}$$

şeklini alır ([9], s.184).

(1.9) formülünün şu ilginç özelliği vardır: Sabit bir z ve $f(z)$ için (1.9) $\mu_g(z)$ ye göre kompleks analitiktir, ve birim dairesinin kendi üzerine konform tasviridir.

1.4. Beltrami Diferensiyel Denkleminin Varlık ve Teklik Teoremleri

Kuvazikonform homeomorfizmaların Beltrami diferensiyel denklemi-
nin çözümleri olarak tanımlanması; (1.7) diferensiyel denkleminin homeo-
morfik L^2 -çözümlerinin varlığı ve tekliği, kuvazikonform tasvirlerin μ
kompleks dilatasyonu cinsinden ifade edilebilmesi gibi bazı önemli prob-
lemleri ortaya çıkarır.

Teorem 1.3. (VARLIK TEOREMİ) μ bir B bölgesinde $\|\mu\|_{\infty} < 1$ koşulunu gerçekleyen ölçülebilir bir fonksiyon olsun. B bölgesinin kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde μ ye eşit olan bir kuvazikonform homeomorfizması vardır.

Yukarıdaki genellikte Varlık teoreminin ispatı 1957 yılında Vekua [25] tarafından verilmiştir. Aynı yıl Bers [3] Varlık teoreminin Murre tarafından 1938 yılında ispatlanmış olduğuna dikkatleri çekmiştir. Bojarski Varlık teorimini singüler integral transformasyonlar kullanarak daha basit bir şekilde ispatlamıştır [1].

(1.9) formülünden hareketle kompleks dilatasyonun bir kuvazikonform tasviri konform dönüşümler farkı ile belirlediği bulunur:

Teorem 1.4. (TEKLİK TEOREMİ) $f: B \rightarrow B'$ kompleks dilatasyonu μ olan bir kuvazikonform tasvir olsun. 0 takdirde, B bölgesinin kompleks dilatasyonu B de hemen hemen her yerde μ ye eşit olan her kuvazikonform tasviri, h fonksiyonu B' de konform olmak üzere $h \circ f$ şeklindedir;

Diğer bir deyişle, f ve g B bölgesinin kompleks dilatasyonları sırasıyla μ_f ve μ_g olan iki kuvazikonform homeomorfizması olsun. B de hemen hemen her yerde $\mu_f = \mu_g$ ise, $g \circ f^{-1}$ konformdur.

İspat. (1.9) formülünden $\mu_{g \circ f^{-1}}$ nin $f(B)$ bölgesinde hemen hemen her yerde sıfır olduğu çıkar. 0 halde $g \circ f^{-1}$ tasviri 1-kuvazikonform, yani konformdur.

II. KUVAZIKONFORM GENİŞLEMESİ OLAN YALINKAT FONKSİYONLAR

Düzleme kuvazikonform genişlemesi olan yalınkat fonksiyonlar ile ilgili ekstremal problemlerin çözümünde başlıca iki yöntem kullanılmıştır. Birincisi, Schiffer tarafından kuvazikonform tasvirler için geliştirilen varyasyon yöntemi, diğeri Lehto tarafından verilen singüler integrallerin kullanılmasına dayanan bir yöntemdir.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde verilen sonuçların izlenmesine kolaylık olmak üzere, burada ikinci yöntemden kısaca bahsedilecek ve üçüncü bölümde kullanılan bazı notasyon ve kavramlar verilecektir. Daha geniş bilgi için [11, 12, 13, 5] çalışmalarına başvurulabilir.

2.1. Σ_k Sınıfı

Σ_k ile genişletilmiş düzlemin, $D^* = \{z \mid |z| > 1\}$ bölgesinde konform olan,

$$(2.1) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0$$

normalizasyonunu gerçekleyen k -kuvazikonform homeomorfizmaları sınıfını gösterelim.

Tanıma göre, bir $f \in \Sigma_k$ fonksiyonu bir $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ Beltrami diferensiyel denkleminin homeomorfik L^2 -çözümüdür. Burada μ kompleks dilatasyonu $\|\mu\|_{\infty} \leq k < 1$ koşulunu gerçekler. Ayrıca, f tasvirinin D^* bölgesinde konform olması nedeniyle μ kompleks dilatasyonunun dayanağı¹⁾ $|z| \leq 1$ bölgesindedir.

Σ_0 düzlemin (2.1) normalizasyonunu gerçekleyen konform tasvirleri sınıfıdır. O halde, Σ_0 sınıfında yalnız $z \rightarrow z$ fonksiyonu bulunur. $\Sigma'_k = \{f|_{D^*} | f \in \Sigma_k\}$ olsun. O takdirde, her Σ'_k , $0 \leq k < 1$, sınıfı, D^* bölgesinin (2.1) normalizasyonunu gerçekleyen yalınkat meromorf fonksiyonları sınıfı Σ tarafından içerilir. Diğer taraftan, Σ'_k sınıfları Σ sınıfında yoğundur. Diğer bir deyişle, her $f \in \Sigma$ fonksiyonu $f_n \in \Sigma_{k_n}$, $k_n < 1$, olmak üzere bir $\{f_n\}$ dizisinin limitidir²⁾.

Σ_k sınıfına ait bir f fonksiyonunun μ kompleks dilatasyonunun dayanağı sınırlıdır. Bu özellik esas olmak üzere, Bojarski yöntemi kullanılarak Σ_k sınıfı fonksiyonları için bir gösteriliş formülü çıkarılmıştır ([11], IV.2):

Teorem 2.1. $f \in \Sigma_k$ ve μ , f fonksiyonunun kompleks dilatasyonu olsun. O takdirde,

$$(2.2) \quad f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} T\phi_n(z)$$

dir. Burada, $\phi_1 = \mu$, $\phi_n = H\phi_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$,

1) *Support: Dayanak.*

2) *Yakınsaklık küresel metriktedir.*

$$(2.3) \quad T\phi_n(z) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\phi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad H\phi_n(z) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\phi_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

dır. İntegraller bütün düzlem üzerinden alınmıştır. Seri bütün düzlemde düzgün yakınsaktır.

(2.3) de sağdaki integrale tanımlanan H lineer transformasyonuna HILBERT TRANSFORMASYONU denir ([9], III. §7). $p \geq 2$ için H transformasyonunun L^p -normu

$$\|H\|_p = \sup_{\|\phi_n\|=1} \|H\phi_n\|_p$$

her $p \geq 2$ için sonludur (Calderon-Zygmund eşitsizliği). $\|H\|_p$ p nin sürekli bir fonksiyonudur, $p \rightarrow 2$ için $\|H\|_p \rightarrow 1$ dir ([9], s.214; [1], s.106, s.113-115).

L_k^∞ ile, dayanağı $|z| \leq 1$ de olan, $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ koşulunu gerçekleyen kompleks değerli ölçülebilir μ fonksiyonları sınıfını gösterelim. $\mu \in L_k^\infty$ ise, Beltrami diferensiyel denkleminin Varlık teoremine göre düzlemin, kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde μ ye eşit olan bir f k -kuvazikonform homeomorfizması vardır. Teklik teoremine göre f homeomorfizması düzlemin konform tasvirlerine bağlı olarak, yani bir Möbius dönüşümü farkıyla belirlenir. (2.1) normalizasyonu nedeniyle $f \in \Sigma_k$ tektir. O halde, Σ_k sınıfı fonksiyonları ile L_k^∞ sınıfı fonksiyonları arasında bire-bir bir karşılama vardır. Bu nedenle, bir $f \in \Sigma_k$ fonksiyonunu μ kompleks dilatasyonu cinsinden ifade eden (2.2) gösteriliş formülü $f(z)$ fonksiyonunun μ kompleks dilatasyonuna

bağıllığının incelenmesinde kullanılabilir.

B düzlemin sonlu bir bölgesi olsun. Her $w \in B$ için, dayanağı $|z| \leq 1$ de olan ve $\|\mu(\cdot, w)\|_\infty$ koşulunu gerçekleyen bir ölçülebilir $\mu(\cdot, w)$ fonksiyonu var olsun. Beltrami diferensiyel denkleminin varlık ve teklik teoremlerine göre her $\mu(\cdot, w)$ için düzlemin, kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde $\mu(\cdot, w)$ ya eşit olan ve (2.1) normalizasyonunu gerçekleyen tek bir $f(\cdot, w)$ kuvazikonform homeomorfizması vardır. O halde, her sonlu, sabit z için $w \rightarrow f(z, w)$ B bölgesinde kompleks değerli bir fonksiyondur. $f^{(n)}(z, w)$, $f(\cdot, w)$ fonksiyonunun $z \in D^*$ için n nci türevini ve $a_n(w)$, $f(\cdot, w)$ nun D^* bölgesindeki kuvvet serisi katsayılarını gösterebilir. (2.2) formülünü kullanarak Lehto [11] aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.2. $\mu(z, \cdot)$, her sonlu z için B bölgesinde w nun bir analitik (holomorf) fonksiyonu olsun. O takdirde, $w \rightarrow f(z, w)$ her sonlu z için analitiktir. Bundan başka, $w \rightarrow f^{(n)}(z, w)$, $n = 1, 2, \dots$, $z \in D^*$, fonksiyonları ve $w \rightarrow a_n(w)$, $n = 1, 2, \dots$, fonksiyonları B bölgesinde analitiktir.

2.2. Σ_k Sınıfı İçin Majorant Prensibi

Lehto [11] Teorem 2.2. yi klâsik fonksiyonlar teorisinin esas teoremlerinden Schwarz Lemması ile birlikte kullanarak MAJORANT prensibi olarak bilinen bir genel eşitsizlik vermiştir. Bu eşitsizlik kullanılarak Σ sınıfında bilinen bazı sonuçlar Σ_k sınıfına aktarılabilmektedir.

Tanım 2.1. (Analitik fonksiyonel) $f \in \Sigma$ olsun. Σ sınıfında bir Φ analitik fonksiyoneli, f fonksiyonunun sonlu sayıdaki kuvvet serisi katsayılarına, f fonksiyonunun, f nin türevleri $f^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, k$, fonksiyonlarının verilen sonlu sayıdaki noktalardaki değerlerine göre kompleks değerli analitik bir fonksiyondur.

Bir analitik fonksiyonel süreklidir; yani, f bir $\{f_n\}$ dizisinin düzgün bir limiti ise, $\lim \Phi(f_n) = \Phi(f)$ dir.

Σ sınıfında tanımlanan bir analitik fonksiyonel her Σ_k^1 sınıfında da tanımlıdır. Σ ve Σ_k^1 kapalı normal aile olduklarından³⁾ ve Φ sürekli bir fonksiyonel olduğundan, $|\Phi(f)|$ yi Σ ve Σ_k^1 sınıflarında maksimum kılan f fonksiyonları vardır.

$$M(k) = \max_{f \in \Sigma_k} |\Phi(f)| \quad \text{ve} \quad M(1) = \max_{f \in \Sigma} |\Phi(f)|$$

yazalım. $M(k)$ $[0,1]$ aralığında azalmayan bir fonksiyondur.

Ayrıca, $M(k)$ $[0,1]$ aralığında süreklidir [5].

Marjorant Prensibi. Φ , Σ sınıfında tanımlanmış $f(z) = z$ için sıfır olan analitik bir fonksiyonel olsun. 0 takdirde,

$$(2.3) \quad M(k) \leq kM(1)$$

dir.

(2.3) de eşitlik k nın, $0 < k < 1$, bir değeri için gerçekleştiğinde k nın her değeri için gerçekleşir.

³⁾ Küresel metrikde düzgün yakınsaklığa göre.

İspat. $0 < k < k' \leq 1$ olacak şekilde k ve k' sayılarını seçelim. $f_k \in \Sigma_k'$ keyfî bir fonksiyon, f_k nın kompleks dilatasyonu μ olsun. w , $|w| < k'/k$ koşulunu gerçekleyen bir parametre olmak üzere düzlemin, kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde $w\mu$ ye eşit olan ve (2.1) normalizasyonunu gerçekleyen k' -kuvazikonform f homeomorfizmalarını gözönüne alalım. $|\Phi(f)| \leq M(k')$ dür. Teorem 2.2 ye göre, $\Phi(f)$ $|w| < k'/k$ bölgesinde w ya analitik olarak bağlıdır. $w = 0$ için $f \in \Sigma_0$, yani idantik tasvirdir. $\Phi(id) = 0$ olduğu gözönüne alınarak Schwarz Lemma'sı uygulanırsa

$$|\Phi(f)| \leq \frac{k}{k'} M(k') |w|$$

elde edilir. $w = 1$ için $f = f_k$ dır, $f_k \in \Sigma_k^p$ sınıfında keyfî bir fonksiyon olduğundan,

$$M(k) \leq k \frac{M(k')}{k'}$$

dir. $k' \rightarrow 1$ için (2.3) elde edilir.

(2.3) eşitsizliği bir $k < 1$ için gerçeklensin. f_k fonksiyonu Σ_k içinde ekstremal ve f_k nın kompleks dilatasyonu μ_k olsun. $|w| < 1/k$ olmak üzere, kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde $w\mu_k$ ya eşit olan ve (2.1) normalizasyonunu gerçekleyen f fonksiyonlarını gözönüne alalım. $|\Phi(f)| \leq M(1)$ olduğundan, Schwarz Lemma'sı uygulanarak $|\Phi(f)| \leq kM(1)w$ bulunur. Fakat, burada eşitlik $w = 1$ için gerçekleşmektedir. O halde, maksimum prensibine göre $|w| < 1/k$ için

$$(2.4) \quad |\Phi(f)| = kM(1)w$$

olur. $k' \in [0,1)$ keyfi verilmiş olsun. 0 takdirde, $|w| = k'/k$ için $f \in \Sigma'_k$. (2.3) ve (2.4) den, f fonksiyonunun Σ'_k de ekstremal olduğu sonucuna varılır. Diğer bir deyişle, (2.3) eşitsizliğinde eşitlik bir $k \in (0,1)$ için gerçekleşirse, k nın her değeri için gerçekleşir.

Aşağıda, Sonuç 2.1, (2.3) eşitsizliğinin Teichmüller uzayları teorisi açısından önemli bir uygulaması olduğu için verilmiştir. Sonuç 2.2. ise üçüncü bölümde kullanılacaktır.

$f \in \Sigma$ olsun. f fonksiyonunun Schwarz türevi

$$S_f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$$

ile tanımlanır. $f \in \Sigma$ için

$$(|z|^2 - 1)^2 |S_f(z)| \leq 6$$

dır (Kraus-Nehari teoremi).

Sonuç 2.1. $f \in \Sigma'_k$ olsun. 0 takdirde,

$$(|z|^2 - 1)^2 |S_f(z)| \leq 6k$$

dır. Tahmin kesindir.

İspat. $\Phi(f) = (|z|^2 - 1)^2 S_f$ olsun. Φ idantik tasvir için sıfır değerini alan bir analitik fonksiyonel olduğundan, (2.3) eşitsizliğini uygulayarak, Σ_k için

$$(|z|^2 - 1)^2 |S_f(z)| \leq 6k$$

elde edilir. Eşitlik

$$(2.5) \quad f(z) = \begin{cases} |z| > 1 & \text{ için } z + (k/z) \\ |z| \leq 1 & \text{ için } z + k\bar{z} \end{cases}$$

için gerçekleşir [10, 11, 14].

$f \in \Sigma_k$ olsun. f fonksiyonunun D^* bölgesinde

$$(2.6) \quad f(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

şeklinde seriye açılımı vardır.

Sonuç 2.2. $f \in \Sigma_k$ olsun. 0 takdirde, $n = 1, 2$ için

$$(2.7) \quad |b_n| \leq \frac{2k}{n+1}$$

dır. Tahmin kesindir.

İspat. $\Phi(f) = b_n$ ($n = 1, 2$) alalım. $n = 1, 2$ için $\max_{\Sigma} |b_n| = \frac{2}{n+1}$

dır. (2.3) eşitsizliği $\Phi(f) = b_n$ fonksiyoneline uygulanırsa,

$n = 1, 2$ için

$$\max_{\Sigma_k} |b_n| \leq \frac{2k}{n+1}$$

bulunur. Eşitlik $n = 1$ için (2.5) fonksiyonu, $n = 2$ için

$$f(z) = \begin{cases} |z| > 1 & \text{ için } (z^{3/2} + kz^{-3/2})^{2/3} \\ |z| \leq 1 & \text{ için } (z^{3/2} + k\bar{z}^{-3/2})^{2/3} \end{cases}$$

fonksiyonu için gerçeklenir.

Uyarı. $S_k(\infty)$ düzlemin $D = \{z \mid |z| < 1\}$ birim dairesinde konform olan, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyonunu gerçekleyen ve ∞ noktasını sabit bırakan k -kuvazikonform homeomorfizmaları sınıfını göstersin.

Σ ve Σ_k sınıfları yerine, sırasıyla, S ve $S_k(\infty)$ sınıfları alındığında Teorem 2.2. ve Majorant prensibi S ve $S_k(\infty)$ sınıfları için de geçerlidir [5].

III. p -DEĞERLİ KUVAZİMEROMORF FONKSİYONLAR

Bu bölümde genişletilmiş düzlemin, kısmen analitik olan normalize edilmiş kuvazimeromorf fonksiyonları gözönüne alınmış, düzlemin kısmen konform olan normalize edilmiş kuvazikonform homeomorfizmaları için bilinen bazı sonuçlar bu fonksiyonlara genelleştirilmiştir¹⁾.

3.1. Σ_k^p Sınıfı

Tanım 3.1. μ fonksiyonu B bölgesinde $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ koşulunu gerçekleyen ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bir f fonksiyonu B bölgesinde sürekli (küresel metriğe göre) ve B bölgesinde $f_z = \mu f_z$ Beltrami diferansiyel denkleminin genelleştirilmiş bir L^2 -çözümü ise, f fonksiyonuna B bölgesinde k -kuvazimeromorftur denir.

μ fonksiyonu B bölgesinde idantik olarak sıfır ise, Beltrami denklemi, $f_z = 0$, Cauchy-Riemann denklemine indirgenir. Dolayısıyla, f fonksiyonu B bölgesinde meromorftur.

¹⁾ Bu bölümde verilen sonuçların bir kısmı daha önce yayımladığım [6] No.1u kaynaktan alınmıştır.

Tanım 3.2. Genişletilmiş düzlemin, D^* bölgesine kısıtlaması meromorf olan,

$$(3.1) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z^p) = 0, \quad p \in \mathbb{N},$$

ile normalize edilmiş, $f(z) = \infty$ değerini yalnız $z = \infty$ için alan k -kuvazimeromorf f fonksiyonları sınıfını Σ_k^p ile gösterelim.

Teorem 3.1. Σ_k^p sınıfına ait bir f fonksiyonunun, $h \in \Sigma_k$ ve F_p , h fonksiyonunun p nci dereceden bir Faber polinomu olmak üzere,

$$(3.2) \quad f = F_p \circ h$$

şeklinde tek bir gösterilişi vardır.

İspat. $f \in \Sigma_k^p$ ve μ , f fonksiyonunun kompleks dilatasyonu olsun. Beltrami diferansiyel denkleminin varlık ve teklik teoremlerine göre, düzlemin kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde μ ye eşit olan ve (2.1) normalizasyonunu gerçekleyen tek bir h kuvazikonform homeomorfizması vardır. f ve h fonksiyonlarının kompleks dilatasyonları hemen hemen her yerde eşit olduğundan, (1.9) formülüne göre

$$F_p = f \circ h^{-1}$$

fonksiyonunun kompleks dilatasyonu düzlemde sıfırdır. f ve h^{-1} L^2 -türevlerini haiz olduklarından F_p fonksiyonu L^1 -türevlerini haizdir, o halde bütün düzlemde meromorftur. Dolayısıyla, rasyonel bir fonksiyondur. $f(z) = \infty$ değerini yalnız $z = \infty$ için aldığından F_p fonksiyonu

bir polinom, (3.1) normalizasyonu nedeniyle, p nci dereceden bir polinomdur.

f fonksiyonunun D^* bölgesinde (3.1) normalizasyonu nedeniyle

$$(3.3) \quad f(z) = z^p + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

şeklinde seriye açılımı vardır. O halde, h fonksiyonunun (2.6) şeklinde seriye açılımı gözönüne alınırsa, D^* bölgesinde $F_p(h(z))$ fonksiyonu

$$F_p(h(z)) = z_p + \sum_{n=1}^{\infty} c_{pn} z^{-n}$$

şeklinde seriye açıldığından F_p , h nın p nci dereceden Faber polinomudur [16, 21]. Faber polinomlarının tekliği nedeniyle, (3.2) gösterilişi tektir.

Bunun sonucu olarak, Σ_k^p sınıfına ait bir fonksiyon genişletilmiş düzlemde her değeri tam p defa alır.

(3.2) den hemen f fonksiyonunun düzlemde, h ile tasviri F_p fonksiyonunun türevi F_p' nün sıfırları olan noktaların ve $z = \infty$ noktasının dışında yerel homeomorf olduğu çıkar. O halde, f fonksiyonu izole noktalar dışında yerel kuvazikonform homeomorfizmadır.

Teorem 3.1. e göre $\Sigma_k^1 = \Sigma_k$ dır. 0-kuvazimeromorf fonksiyonlar meromorf olduğundan, Σ_0^p sınıfı yalnız $z \rightarrow z^p$ fonksiyonunu içerir. Σ_k^p ile, aynı zamanda, Σ_k^p sınıfına ait f fonksiyonlarının D^* bölgesine kısıtlamaları olan $f|_{D^*}$ fonksiyonlarının sınıfını gösterelim.

Σ_1^p D^* bölgesinin, her değeri p defa alan ve (3.1) ile normalize edilmiş meromorf f fonksiyonları sınıfı olsun. 0 takdirde, Σ_1^p sınıfı, her Σ_k^p , $0 \leq k < 1$ sınıfını içerir.

3.2. Gösteriliş Formülü

Bojarski yöntemi ([9], V.5.3; 5.7) kullanılarak, ilk önce bir $f \in \Sigma_k^p$ fonksiyonunu μ kompleks dilatasyonu cinsinden ifade eden bir gösteriliş formülü çıkarılacaktır.

f bir B bölgesinde L^1 -türevlerini haiz bir fonksiyon olsun. A , $\bar{A} \subset B$ olmak üzere uzunluğu ölçülebilir bir eğri ile sınırlandırılmış bir JORDAN bölgesi olsun. Aşağıdaki formül Genelleştirilmiş Cauchy formülü olarak bilinir ([9], III.7.1).

$$(3.4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad z \in A, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Burada birinci integral bir holomorf fonksiyon tanımlar; ikinci integral ise Cauchy esas değeri olarak vardır. f fonksiyonu A bölgesinde bir analitik fonksiyon ise (3.4) formülü Cauchy integral formülüne indirgenir.

$f \in \Sigma_k^p$ olsun. $z \mapsto f(z) - z^p$ fonksiyonuna (3.4) Genelleştirilmiş Cauchy formülü uygulanarak ve (3.1) normalizasyonu gözönünde tutularak, f fonksiyonunun her z için

$$(3.5) \quad f(z) = z^p + Tf_{\bar{z}}(z)$$

denklemini gerçeklediği görülür. Burada

$$Tf_{\bar{z}}(z) = - \frac{1}{\pi} \iint \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta$$

dır. İntegral bütün düzlem üzerinden alınmıştır.

(3.5) denklemi z ye göre türetilir ve f fonksiyonunun $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ denklemini hemen hemen her yerde gerçeklediği gözönünde tutulursa, $w = f_{\bar{z}}$ fonksiyonunun hemen hemen her yerde

$$(3.6) \quad w = p\mu z^{p-1} + \mu Hw$$

denklemini gerçeklediği görülür. Burada

$$Hw(z) = - \frac{1}{\pi} \iint \frac{w(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta d\eta$$

Hilbert transformasyonudur. Bu denklem iterasyon ile çözülebilir.

$\phi_1 = pz^{p-1}\mu$, $\phi_n = \mu H\phi_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$ olsun. $q \geq 2$ için Hilbert transformasyonu L^q da sınırlı, yani L^q -normu $\|H\|_q$ sonlu olduğundan (Calderon-Zygmund eşitsizliği),

$$(3.7) \quad \|\phi_i\|_q = \|\mu H\phi_{i-1}\|_q \leq k \|\phi_{i-1}\|_q \leq k \|H\|_q \|\phi_{i-1}\|_q \leq Ck^i \|H\|_q^{i-1}$$

dır. $k\|H\|_q < 1$ olacak şekilde bir $q > 2$ seçelim. $\|H\|_q$ nun q ya göre sürekli ve $\|H\|_2 = 1$ olması nedeniyle bu yapılabilir.

0 takdirde, (3.7) ye göre

$$w_n = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad n = 1, 2, \dots$$

L^q da yakınsak bir dizidir.

$$w_{n+1} = puz^{p-1} + \mu Hw_n$$

olduğundan $\lim w_n = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i$ (3.6) denklemini gercekler. Bu limit (3.6) denkleminin L^q da tek çözümüdür. Zira, ω (3.6) denkleminin ikinci bir çözümü ise, (3.6) dan

$$\|w - \omega\|_q \leq k \|H\|_q \|w - \omega\|_q,$$

ve buradan hemen hemen her yerde $w = \omega$ olur. O halde hemen hemen her yerde $\lim w_n = f_z$ dir.

ϕ_i , $i = 1, 2, \dots$, fonksiyonlarının dayanağı $|z| \leq 1$ bölgesinde olduğundan, $q > 2$ için Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$(3.8) \quad |T\phi_i(z)| \leq C_1 \|\phi_i\|_q$$

bulunur. Burada C_1 yalnız q ya bağlı bir sabittir. Bu her $T\phi_i$ fonksiyonu için doğrudur. Dolayısıyla, n, m pozitif tam sayılar olmak üzere

$$|T\phi_n(z) - T\phi_m(z)| \leq C_2 \|\phi_n - \phi_m\|_q$$

dır. O halde, (3.5) den

$$(3.9) \quad f(z) = z^p + \sum_{i=1}^{\infty} T\phi_i(z)$$

bulunur. Seri bütün düzlemde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Uyarı. (3.1) normalizasyonunda z^p yerine keyfî bir

$P(z) = A_p z^p + \dots + A_0$ polinomu alınabilir. O takdirde, (3.9) gösteriliş formülü

$$f(z) = P(z) + \sum_{i=1}^{\infty} T\phi_i(z)$$

şeklini alır. Burada $\phi_1 = P'(z)\mu$, $\phi_n = \mu H \phi_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$ dür.

3.3. Asimtotik Tahminler

Gösteriliş formülü (3.9) $k \rightarrow 0$ için $f(z)$ fonksiyonunun duru-
munu incelemekde kullanılabilir. Ayrıca, gösteriliş formülü (3.9)
kullanılarak, $-f$ fonksiyonunun kuvvet serisi katsayıları için asimto-
tik tahminler bulunacaktır.

Sonuç 3.1. $f \in \Sigma_k^p$ olsun. 0 takdirde,

$$(3.10) \quad f(z) = z^p - \frac{p}{\pi} \int \int_{|\zeta| < 1} \frac{\zeta^{p-1} \mu(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta + o(k^2)$$

dir. Kalan terim z ye göre düzgün sınırlıdır.

İspat. (3.7) ve (3.8) den

$$\sum_{i=2}^{\infty} |T\phi_i(z)| \leq C_3 \sum_{i=2}^{\infty} (k \|H\|_q)^i$$

elde edilir. Burada C_3 yalnız p ve q ya bağlı bir sabittir. $q > 2$,
 $k \|H\|_q < 1$ olacak şekilde seçildiğinden sağ taraftaki seri bir geo-
metrik seridir. 0 halde, her z için

$$\sum_{i=2}^{\infty} |T\phi_i(z)| \leq C_2' \frac{k^2 \|H\|_q^2}{1 - k \|H\|_q}$$

olur. Böylece, gösteriliş formülü (3.9)

$$(3.11) \quad f(z) = z^p + T_{\phi_1}(z) + o(k^2)$$

şeklini alır. Kalan terim z ye göre düzgün sınırlı olup, (3.11) den (3.10) elde edilir.

(3.10) formülünden hemen $|f(0)|$ için bir asimtotik tahmin bulunur.

Sonuç 3.2. $f \in \Sigma_k^p$ olsun. 0 takdirde,

$$(3.12) \quad |f(0)| \leq 2k + o(k^2)$$

dır. Eşitlik

$$f(z) = \begin{cases} |z| > 1 & \text{için} & z^p + k^2 e^{2i\theta} z^{-p} \\ |z| \leq 1 & \text{için} & z^p + 2ke^{i\theta}(|z|^p - 1) + k^2 e^{2i\theta} \bar{z}^p, \end{cases}$$

θ gerçel

fonksiyonu için gerçekleşir.

İspat. (3.10) dan

$$(3.13) \quad |f(z) - z^p| \leq \frac{pk}{\pi} \int \int_{|\zeta| < 1} \frac{|\zeta|^{p-1}}{|\zeta - z|} d\xi d\eta + o(k^2)$$

dir. Burada eşitlik

$$\mu(\zeta) = ke^{i\theta} \frac{\zeta - z}{|\zeta - z|} (\bar{\zeta}/\zeta)^{(p-1)/2} \quad \text{h.h.y.}$$

ise gerçektlenir. $z = 0$ için (3.13) eşitsizliğı (3.12) tahminini verir.

$f \in \Sigma_k^p$ olsun. f fonksiyonunun D^* bölgesinde (3.3) şeklinde seriye açılımı vardır.

Teorem 2.2. $f \in \Sigma_k^p$ olsun. 0 takdirde

$$(3.14) \quad |a_n| \leq \frac{2pk}{p+n} + o(k^2)$$

dir. Tahmin kesindir.

İspat. Gösteriliş formülü (3.9) ve (3.3) karşılaştırılırsa

$$(3.15) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \int \int_{|\zeta|<1} \phi_i(\zeta) \zeta^{n-1} d\xi d\eta, \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur.

Schwarz eşitsizliğı uygulanırsa,

$$\int \int_{|\zeta|<1} |\phi_i(\zeta) \zeta^{n-1}| d\xi d\eta \leq \pi^{1/2} n^{1/2} \|\phi_i\|_2$$

olur. (3.7) eşitsizliğı ve $\|H\|_2 = 1$ olduğı kullanılarak,

$$\int \int_{|\zeta|<1} |\phi_i(\zeta) \zeta^{n-1}| d\xi d\eta \leq \pi p^{1/2} n^{-1/2} k^i$$

bulunur. 0 halde, (3.15) ifadesi

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int \int_{|\zeta|<1} \phi_i(\zeta) \zeta^{n-1} d\xi d\eta + o(k^2)$$

şeklinde yazılabilir. $\phi_1(z) = pz^{p-1}\mu(z)$ olduğundan, buradan (3.14)

elde edilir. Eşitlik

$$(3.16) \quad \mu(\zeta) = ke^{i\theta} (\bar{\zeta}/\zeta)^{(n+p-2)/2} \quad \text{h.h.y}$$

için gerçekleşir. Kompleks dilatasyonu (3.16) şeklinde olan ekstremal fonksiyonlar

$$f_n(z) = \begin{cases} |z| > 1 & \text{için} & (z^{(p+n)/2} + ke^{i\theta} \bar{z}^{-(p+n)/2})^{2p/p+n} \\ |z| \leq 1 & \text{için} & (z^{(p+n)/2} + ke^{i\theta} \bar{z}^{-(p+n)/2})^{2p/p+n} \end{cases}$$

şeklindedir.

$p = 1$ için (3.10) ve (3.14) den Σ_k sınıfı fonksiyonları için bilinen sonuçlar elde edilir [12].

Aşağıda, Σ_k^p sınıfına ait fonksiyonların Faber polinomları cinsinden gösterilişi (3.2) kullanılarak, $p = 2$ halinde, f fonksiyonunun a_1 kuvvet serisi katsayısı için asimtotik olmayan kesin bir üst sınır verilmiştir.

Teorem 3.3. $f(z) = z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} \in \Sigma_k^2$ olsun. 0 takdirde,

$$(3.17) \quad |a_1| \leq \left(\frac{4}{3}\right)k$$

dir. Tahmin kesindir.

İspat. $f \in \Sigma_k^p$ olsun. Teorem 1 e göre f fonksiyonunun (3.2) şeklinde tek bir gösterilişi vardır. h fonksiyonunun D^* bölgesinde seriye açılımı

$$h(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

olsun. h fonksiyonunun $f_n(w)$ Faber polinomları

$$\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(w)}{\zeta^{n+1}}$$

ile tanımlanır [16]. 0 halde $F_0(w) \equiv 1$, $F_1(w) = w$, $F_2(w) = w^2 - 2b_1$, $F_3(w) = w^3 - 3b_1w - 3b_2$ ve genel olarak $F_n(w) = w^n + \dots$ dir. h fonksiyonunun p 'inci dereceden Faber polinomuna karşılık olan Faber fonksiyonu

$$(3.18) \quad F_p(h(z)) = z^p + p \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} z^{-k}$$

dır. Burada a_{pk} katsayıları

$$\log \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} \zeta^{-p} z^{-k}$$

ile verilir. $a_{pk} = a_{kp}$, $a_{1p} = a_{p1} = b_p$ dir. (3.3) ve (3.18) den

$$(3.19) \quad a_1 = pa_{p1} = pb_p$$

elde edilir. $p \geq 2$ için, Sonuç 2.2. ye göre, $|b_2| \leq 2k/3$ olduğundan, (3.19) dan

$$|a_1| \leq (4/3)k$$

bulunur. Eşitlik

$$f(z) = \begin{cases} |z| > 1 & \text{için} & (z^{3/2} + ke^{i\theta}z^{-3/2})^{4/3} \\ |z| \leq 1 & \text{için} & (z^{3/2} + ke^{i\theta}\bar{z}^{3/2})^{4/3} \end{cases}$$

için gerçekleşir.

3.4. Analitik Bağılılık

L_k^∞ ile, dayanağı $|z| < 1$ de olan ve $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ koşulunu gerçekleyen kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonların sınıfını göstermiştik. Teorem 3.1. e göre her $\mu \in L_k^\infty$ için tek bir $f \in \Sigma_k^p$ vardır. Diğer bir deyişle, L_k^∞ ve Σ_k^p sınıfı fonksiyonları arasında bire-bir bir karşılama vardır. Bu nedenle, kuvazikonform homeomorfizmalarda olduğu gibi (Bölüm II), gösteriliş formülü (3.9) $f(z)$ fonksiyonunun μ kompleks dilatasyonuna bağılılığının incelenmesinde kullanılabilir.

$\mu \in L_k^\infty$ olsun. w , $|w| < 1/k$, koşulunu gerçekleyen bir kompleks parametre olmak üzere düzlemin, kompleks dilatasyonu $w\mu$ olan, (3.1) normalizasyonunu gerçekleyen ve $f(z,w) = \infty$ değerini yalnız $z = \infty$ için alan kuvazimeromorf f fonksiyonları cümlesini gözönüne alalım. $\phi_i(,w)$ ile (3.9) gösteriliş formülünde $w\mu$ ye karşılık olan ϕ_i fonksiyonunu gösterelim. $\phi_i(,w) = \phi_i w^i$ olduğundan, gösteriliş formülü (3.9) bu takdirde,

$$(3.20) \quad f(z,w) = z^p + \sum_{i=1}^{\infty} T\phi_i(z)w^i$$

şeklini alır. Seri $|w| < 1/k$ dairesinin her kapalı alt cümlesinde düzgün

yakınsaktır. 0 halde, $w \rightarrow f(z,w)$ fonksiyonu her sonlu z için $|w| < 1/k$ bölgesinde analitiktir (holomorf). $f^{(n)}(z,w)$ ile $f(,w)$ fonksiyonunun n nci türevinin bir $z \in D^*$ noktasındaki değerini, $a_n(w)$ ile kuvvet serisi katsayılarını gösterirsek, (3.20) formülünden $z \in D^*$ için $w \rightarrow f^{(n)}(z,w)$, $n = 1,2,\dots$ fonksiyonları ve $w \rightarrow a_n(w)$ fonksiyonlarının da analitik olduğu çıkar.

Bu sonuca dayanarak ve Σ_k sınıfı fonksiyonları için verilen Alan teoreminin ispat yöntemi [13] kullanılarak, Σ_k^p sınıfı için, ilk defa Alenicy'n [2] tarafından verilen, Alan teoreminin yeni bir ispatı aşağıda verilmiştir.

Gerçekte, Alenicy'n'in Alan teoremi Σ_k^p sınıfından daha geniş bir fonksiyon sınıfı içindir.

ALAN TEOREMİ. $f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} \in \Sigma_k^p$ olsun. 0 takdirde,

$$(3.21) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq p k^2$$

dir. Eşitlik

$$(3.22) \quad f(z) = \begin{cases} |z| > 1 & \text{ için } z^p + k e^{i\theta} z^{-p} \\ |z| \leq 1 & \text{ için } z^p + k e^{i\theta} \bar{z}^p \end{cases}$$

fonksiyonları için gerçekleşir.

İspat. N keyfî pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\sum_{n=1}^N n |a_n|^2$ ifadesini gözönüne alalım. Her Σ_k^p , $0 \leq k \leq 1$, sınıfı kapalı normal

aile olduğundan, $\sum_1^N n|a_n|^2$ ifadesini Σ_k^p içinde maksimum kılan bir f_k fonksiyonu vardır. μ , f_k ekstremal fonksiyonunun kompleks dilatasyonunu gösterebilir. $f(w)$ fonksiyonu; w , $|w| < 1$, koşulunu gerçekleyen bir kompleks sayı olmak üzere, düzlemin, kompleks dilatasyonu hemen hemen her yerde $\tilde{\mu} = w\mu/k$ ya eşit olan, (3.1) normalizasyonunu gerçekleyen ve yalnız $z = \infty$ için ∞ değerini alan kuvazimeromorf fonksiyonu olsun. $a_n(w)$, $n = 1, 2, \dots$ $f(w)$ fonksiyonunun kuvvet serisi katsayılarını gösterebilir. $w \rightarrow a_n(w)$ fonksiyonu $|w| < 1$ de analitiktir, Σ_0^p sınıfı yalnız $z \rightarrow z^p$ fonksiyonunu içerdiğinden, $w = 0$ için sıfır olur.

$a_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$, f_k ekstremal fonksiyonunun kuvvet serisi katsayılarını göstermek üzere,

$$(3.23) \quad b_n = \begin{cases} a_n(k) \neq 0 & \text{ için } (|a_n(k)|^2)/((a_n(k))^2) \\ a_n(k) = 0 & \text{ için } 0 \end{cases}$$

tanımlıyalım. 0 takdirde,

$$(3.24) \quad F(w) = \sum_{n=1}^N n b_n a_n^2(w)$$

fonksiyonu $|w| < 1$ de analitiktir ve $w = 0$ noktasında ikinci mertebeden sıfırı vardır. Σ_1^p sınıfı için bilinen alan teoremi, $\sum n|a_n|^2 \leq p$ [4], kullanılarak

$$|F(w)| \leq \sum_1^N n|a_n(w)|^2 \leq p$$

bulunur. F fonksiyonuna Schwarz Lemması uygulanırsa,

$$(3.25) \quad |F(w)| \leq p|w|^2$$

çıkar. $w = k$ için $\tilde{\mu} = \mu$ dür. O halde, $w = k$ için (3.23), (3.24), (3.25) den

$$\sum_1^N n|a_n(k)|^2 = |F(w)| \leq pk^2$$

bulunur. f_k fonksiyonu Σ_k^p içinde ekstremal fonksiyon olduğundan ve N keyfi alındığından, (3.21) elde edilir.

Sonuç 3.3. (3.21) Alan eşitsizliğinden hemen

$$|a_p| \leq k$$

olduğu görülür. Eşitlik (3.22) fonksiyonu için gerçekleşir.

3.5. Σ_k^p Sınıfı İçin Majorant Prensipli

Φ , Σ_1^p sınıfında tanımlanmış bir analitik fonksiyonel olsun. Σ_k^p sınıfında tanımlanmış bir analitik fonksiyonel her Σ_k^p , $0 \leq k < 1$, sınıfında da tanımlıdır. Bir analitik fonksiyonel sürekli olduğundan ve Σ_k^p ve Σ_1^p sınıfları kapalı normal aile olduklarından, Σ_k^p ve Σ_1^p sınıflarında $|\Phi(f)|$ en büyük değerini alır.

$$M(k) = \max_{f \in \Sigma_k^p} |\Phi(f)|, \quad M(1) = \max_{f \in \Sigma_1^p} |\Phi(f)|$$

olsun.

$M(k)$ $[0,1]$ aralığında azalmayan bir fonksiyondur.

Kuvazikonform homeomorfizmalar için Lehto tarafından verilen Majorant prensibi (Bölüm II) kuvazimeromorf fonksiyonlar için aşağıdaki şekli alır:

Teorem 3.4. Φ , Σ_1^p sınıfında tanımlanmış, $f(z) = z^p$ için sıfır olan bir analitik fonksiyonel olsun. 0 takdirde,

$$(3.26) \quad M(k) \leq kM(1)$$

dir. Eşitlik k nın, $0 < k < 1$, bir değeri için gerçekleştiğinde, k nın $[0,1)$ aralığındaki her değeri için gerçekleşir.

İspat. Tamamen ikinci bölümde verilen Majorant prensibinin ispatına benzer tarzda yürütülür.

3.6. $S_k^p(\infty)$ Sınıfı

$S_k^p(\infty)$ ile genişletilmiş düzlemin, D birim dairesinde analitik olan, $z \rightarrow 0$ için

$$(3.27) \quad f(z) = z^p + o(z^{p+1})^2)$$

normalizasyonunu gerçekleyen ve $f(z) = 0, \infty$ değerlerini yalnız, sırasıyla, $z = 0, \infty$ noktalarında alan f k -kuvazimeromorf fonksiyonları sınıfını göstereyim.

2) $o(z^{p+1})$ notasyonu, z^{p+1} ile bölündüğünde, $z = 0$ ın dolayında sınırlı olan bir ifadeyi göstermektedir.

Bölüm II'de olduğu gibi, $S_k(\infty)$ düzlemin, D birim dairesinde konform olan, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyonunu gerçekleyen, ve ∞ noktasını sabit bırakan f k -kuvazikonform homeomorfizmaları sınıfını gösterebilir.

Aşağıdaki teorem, $S_k(\infty)$ sınıfı için bilinen bazı sonuçları $S_k^p(\infty)$, $k < 1$, sınıfı fonksiyonlarına aktarmakta kullanılabilir.

Teorem 3.5. $S_k^p(\infty)$ sınıfına ait bir f fonksiyonunun $h \in S_k(\infty)$ olmak üzere

$$(3.28) \quad f = h^p$$

şeklinde tek bir gösterilişi vardır.

İspat. $f \in S_k^p(\infty)$ olsun. Teorem 3.1 de olduğu gibi f fonksiyonunun $h \in S_k(\infty)$ ve F bir polinom olmak üzere

$$f = F \circ h$$

şeklinde bir ayrılışı olduğu gösterilebilir. f fonksiyonu sıfır değerini yalnız sıfır noktasında aldığından ve (3.27) normalizasyonunu gerçeklediğinden

$$F \circ h = h^p$$

dir.

$f \in S_k^p(\infty)$ olsun. f fonksiyonunun (3.27) normalizasyonu nedeniyle D bölgesinde

$$f(z) = z^p + b_{p+1} z^{p+1} + \dots$$

şeklinde seriye açılımı vardır.

Teorem 3.6. $f \in S_k^p(\infty)$ olsun. 0 takdirde

$$(3.29) \quad |b_{p+1}| \leq 2pk$$

dır. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = \begin{cases} |z| < 1 & \text{ için } z^p / (1 + ke^{i\theta}z)^{2p} \\ |z| \geq 1 & \text{ için } (z\bar{z})^p / (\sqrt{z} + ke^{i\theta}\sqrt{\bar{z}})^{2p} \end{cases}$$

funksiyonu için gerçekleşir.

İspat. Teorem 3.5. ye göre $h(z) = [f(z)]^{1/p} \in S_k(\infty)$ dir.

Burada $h(z)$ fonksiyonunun, $z = 0$ dolayındaki açılımı

$$h(z) = z + \frac{b_{p+1}}{p} z^2 + \left[\frac{b_{p+2}}{p} + \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) b_{p+1}^2 \right] z^3 + \dots$$

olacak şekilde dalı seçilmiştir. $|b_{p+1}/p| \leq 2k$ ([10], Sonuç 3)

olduğundan (3.29) eşitsizliği elde edilir.

$f \in S_k^p(\infty)$ olsun. 0 takdirde, $F(z) = 1/(f(1/z^{p+1}))^{1/p+1}$ ile

tanımlanan F fonksiyonu bir $\Sigma_k^p(0) = \{f \in \Sigma_k^p \mid \text{yalnız } z = 0 \text{ için } f(z) = 0\}$

sınıfındadır ve D^* bölgesinde

$$F(z) = z^p - \frac{b_{p+1}}{p+1} z^{-1} + \dots$$

şeklinde seriye açılımı vardır. 0 halde, (3.29) eşitsizliği kullanılarak

$$|a_1| = \left| \frac{b_{p+1}}{p+1} \right| \leq \frac{2pk}{p+1}$$

bulunur.

Goluzin [4], Σ_1^p sınıfına ait ve D^* bölgesinde sıfırı olmayan $f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ fonksiyonları için

$$|a_1| \leq \frac{2p}{p+1}$$

olduğunu ispatlamıştır. Burada üst sınır kesindir.

Bu düşüncelere göre, (3.14) asimtotik üst sınırının, her k , $0 < k < 1$, için Σ_k^p sınıfının D^* bölgesinde sıfırı olmayan f fonksiyonları için kesin üst sınır olduğunu tahmin ediyorum.

3.7. Yoğunluk Problemi

Σ_k^1 , $0 \leq k < 1$, ve Σ sınıfları Bölüm II'de tanımlandığı gibi olsun. Σ_k^1 sınıfları Σ sınıfında yoğundur. Diğer bir deyişle, her $f \in \Sigma$ fonksiyonu, f_n bir Σ_k^1 , $0 < k_n < 1$, sınıfının elemanı olmak üzere, bir $\{f_n\}$ dizisinin limitidir. Bu, şu şekilde görülebilir: $f \in \Sigma$ olsun. $\{r_n\}$, $r_n > 1$ olmak üzere, limiti $\lim r_n = 1$ olan bir dizi olsun. $z \in D^*$ için $f_n(z) = f(r_n z)/r_n$ fonksiyonlarını alalım. Birim dairenin f_n ile tasviri bir analitik eğri olduğundan ve birim dairesini bir kuvazikonform eğri ile sınırlandırılmış bir bölgeye tasvir eden bir yalıncat fonksiyon düzlemin bir kuvazikonform tasvirine genişletilebileceğinden, her f_n fonksiyonu düzlemin bir kuvazikonform

tasvirine genişletilebilir. D^* bölgesinde $\lim f_n(z) = f(z)$ dir.

Benzer olarak, Σ_k^p , $0 < k < 1$, sınıflarının Σ_1^p sınıfında yoğun olup olmadığı sorulabilir. $f \in \Sigma_1^p$, $\{r_n\}$, $r_n > 1$, $\lim r_n = 1$ olan bir dizi olsun. Yukarıda olduğu gibi, $z \in D^*$ için $f_n(z) = f(r_n z)/r_n$ fonksiyonlarını tanımlıyalım. Bu halde, f_n fonksiyonunun düzleme kuvazikonform olarak genişletilip genişletilemeyeceği; genişletilebilmiş olsa bile, bu genişlemenin bir $k < 1$ için Σ_k^p sınıfına ait olup olmayacağı bilinmemektedir. O halde aşağıdaki problemler açıktır.

Problem 1. $f \in \Sigma_1^p$ olsun. $D_r = \{z \mid |z| > r > 1\}$ olduğuna göre, $f|_{D_r}$ fonksiyonu düzleme kuvazikonform olarak genişletilebilir mi?

Tahminim f fonksiyonunun kuvazikonform olarak düzleme genişletilebileceğidir.

Problem 2. Σ_k^p sınıfları Σ_1^p sınıfında yoğun mudur? Tahminim Σ_k^p sınıflarının Σ_1^p da yoğun olmadığıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Ahlfors, L.: Lectures on Quasiconformal Mappings. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.
- [2] Alenicyan, J.U.: Some area theorems for analytic functions with a quasiconformal extension. Math. USSR Sbornik, Vol. 23(1974), No. 1.
- [3] Bers, L.: On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality. Trans. Amer. Math. Soc., 84(1957).
- [4] Golusin, G.M.: Über p-valente Funktionen. Mat. Sb., 8(50)(1940), 277-284 (Russian; German summary).
- [5] Göktürk, Z.: Estimates for univalent functions with quasiconformal extensions. Ann. Acad. Sci. Fenn., 589(1974).
- [6] Göktürk, Z.: On p-valent quasimeromorphic functions. Proceedings of the Rolf Nevanlinna Symposium on Complex Analysis. Silivri, 1976, Publication of the Mathematical Research Institute, İstanbul, No. 7.
- [7] Grötzsch, H.: Über die Verzerrung bei schlichten nicht konformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig 80, 503-507(1928).
- [8] Lavrentieff, M.A.: Sur une classe de représentations continues. Rec. Math. 48, 407-423(1935).
- [9] Lehto, O. and Virtanen, K.I.: Quasiconformal mappings in the plane. Springer-Verlag, Berlin 1973.
- [10] Lehto, O.: Schlicht functions with a quasiconformal extension. Ann. Acad. Sci. Fenn., 500(1971).
- [11] Lehto, O.: Lectures on conformal mappings and Teichmüller spaces. Technion, Haifa 1973.
- [12] Lehto, O.: Quasiconformal mappings and singular integrals. Symposia Matematica XVIII, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma 1976.

- [13] Lehto, O.: Quasiconformal mappings in the plane. Lectures on quasiconformal mappings. Lecture Note 14, University of Maryland, 1975.
- [14] Kühnau, R.: Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen von Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen. Math. Nachr. 48(1971).
- [15] Morrey, C.B.: On the solution of quasilinear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Soc., 43(1938), 126-166.
- [16] Pommerenke, Ch.: Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen. Math. Zeitschr. 85, 197-208(1964).
- [17] Rickman, S.: On the value distribution of quasimeromorphic maps. Ann. Acad. Sci. Fenn. A12(1976), 447-466.
- [18] Rickman, S.: On the theory of quasiregular mappings. Proceedings of the Rolf Nevanlinna Symposium on Complex Analysis, Silvri 1976. Publication of the Mathematical Research Institute, Istanbul, No. 7.
- [19] Rickman, S., and Mattila, P.: Averages of the counting function of a quasiregular mapping. Acta Math.
- [20] Rickman, S.: Omitted values, counting function, and equidistribution of quasiregular mappings. Colloquium on Complex Analysis. Joensuu, Finland, 1978.
- [21] Schiffer, M.: Faber polynomials in the theory of univalent functions. Bull. Amer. Math. Soc., 54, 503-517(1948).
- [22] Teichmüller, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung, Deutch. Math. 3(1938), 621-678.
- [23] Teichmüller, O.: Extremale quasikonformen Abbildungen und quadratische Differentiale. Abh. preuss. Akad. Wiss., 22(1940), 1-197.
- [24] Teichmüller, O.: Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Kl 4(1944).
- [25] Vekua, I.N.: Ob odnoy sisteme singuljarnyh integralo-differencialnyh uravneniy. Trudy Tbliss. Mat. Inst. 24(1957), 136-147.
- [26] Väisälä, J.: Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lecture notes in Mathematics, 229. Springer-Verlag, Berlin 1971.